Barycentre dans le plan

مرجح نقطتين أو ثلاث نقط في المستوى

📚 Résumé du cours

I. Barycentre de deux points pondérés

Définition

Soient A et B deux points du plan, α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Le **barycentre** du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ est l'unique point G vérifiant :

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$$

Formule pratique

Pour tout point M du plan : $\vec{MG} = \dfrac{\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}}{\alpha + \beta}$.

En particulier (avec $M = O$ origine) :

$$G = \frac{\alpha A + \beta B}{\alpha + \beta}$$

Cas particulier : milieu

Si $\alpha = \beta = 1$, alors G est le **milieu de** $[AB]$.

II. Propriétés du barycentre

- **Homogénéité :** Multiplier tous les poids par un même réel $k \neq 0$ ne change pas le barycentre.
- **Le barycentre appartient à la droite** (AB).
- **Position du barycentre :**
  - Si α et β sont de même signe : $G \in [AB]$
  - Si α et β sont de signes opposés : G est à l'extérieur du segment $[AB]$

III. Barycentre de trois points pondérés

Définition

Soient A, B, C trois points et α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Le **barycentre** de $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ est l'unique point G tel que :

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$$

Formule pratique

$$\vec{MG} = \frac{\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Cas particulier : centre de gravité

Si $\alpha = \beta = \gamma = 1$ (ou tous égaux), G est le **centre de gravité du triangle** ABC, à l'intersection des médianes.

IV. Associativité du barycentre

Théorème (associativité)

Soit G le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$. Si H est le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$, alors :

$$G \text{ est le barycentre de } \{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$$

Très utile pour **simplifier les calculs** et **localiser le barycentre**.

V. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soit ABC un triangle. G est le barycentre de $\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$. Construire G.

Solution (associativité) :

Soit H le barycentre de $\{(B, 1); (C, -1)\}$. Comme $1 + (-1) = 0$, ce barycentre n'existe pas... On regroupe différemment.

Soit H le barycentre de $\{(A, 2); (B, 1)\}$. $H = \dfrac{2A + B}{3}$, donc H est sur $[AB]$ à $1/3$ de B.
Alors G est barycentre de $\{(H, 3); (C, -1)\}$. Et $G = \dfrac{3H - C}{2}$. Donc G est sur la droite (HC), à l'extérieur de $[HC]$, du côté de H.

VI. Top 4 pièges à éviter

1. **Diviser par 0.** Toujours vérifier que la somme des poids est $\neq 0$.
2. **Mettre des poids négatifs sans réfléchir.** Le signe affecte la position de G.
3. **Mal appliquer l'associativité.** Vérifier que la somme partielle est $\neq 0$ avant de regrouper.
4. **Confondre $\vec{GA}$ et $\vec{AG}$.** Sens opposés. La définition utilise $\vec{GA}$.

🎯 Formules clés

Barycentre de 2 points ($\alpha + \beta \neq 0$) : $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$ $\vec{MG} = \dfrac{\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}}{\alpha + \beta}$ **Milieu** : $\alpha = \beta = 1$
Centre de gravité : $\alpha = \beta = \gamma = 1$ **Associativité** : on peut regrouper 2 points en leur barycentre partiel (si somme $\neq 0$).

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Pour construire un barycentre : utilise l'associativité pour le ramener à un barycentre de 2 points (plus simple).
- 🎯 Multiplier tous les poids par un même réel ne change rien. Tu peux donc simplifier (ex : poids $4, 6, -2 \to 2, 3, -1$).