Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Calcul vectoriel dans l'espace

الحساب المتجهي في الفضاء

📚 Résumé du cours

I. Vecteurs de l'espace

Définition

Un **vecteur de l'espace** est défini par sa direction, son sens et sa longueur (norme). Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont mêmes direction, sens et norme.

Repère orthonormé direct

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et les 3 vecteurs orthogonaux 2 à 2.

Coordonnées d'un vecteur

Tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. On note $\vec{u}(x, y, z)$.

II. Opérations sur les vecteurs

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Somme :** $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$
- **Multiplication par un scalaire :** $\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$
- **Vecteur opposé :** $-\vec{u} = (-x, -y, -z)$

III. Norme et distance

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Distance entre $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$:
  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

IV. Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \vec{0}$).

Critère pratique

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont colinéaires ssi $\begin{cases} xy' - yx' = 0 \\ yz' - zy' = 0 \\ xz' - zx' = 0 \end{cases}$

V. Coplanarité de trois vecteurs

Définition

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires** ssi l'un d'eux est combinaison linéaire des deux autres : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Critère de coplanarité de 4 points

4 points A, B, C, D sont coplanaires ssi les vecteurs $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ sont coplanaires.

VI. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Dans un repère orthonormé, soient $A(1,0,2)$, $B(2,1,0)$, $C(0,1,1)$.
1) Calculer $\|\vec{AB}\|$ et $\|\vec{AC}\|$.
2) Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont-ils colinéaires ?

Solution :

1) $\vec{AB} = (1,1,-2)$, donc $\|\vec{AB}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.
$\vec{AC} = (-1,1,-1)$, donc $\|\vec{AC}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

2) $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires ssi $1 \times 1 - 1 \times (-1) = 0$, soit $1 + 1 = 2 \neq 0$. Donc **NON colinéaires**.

VII. Top 4 pièges à éviter

1. **Confondre coordonnées de point et de vecteur.** Un point a un nom (ex : A), un vecteur aussi (ex : $\vec{u}$).
2. **Oublier la racine carrée** dans la norme.
3. **Confondre colinéaires et coplanaires.** 2 vecteurs sont colinéaires ; 3 vecteurs sont coplanaires.
4. **Croire que 4 points alignés sont coplanaires.** Vrai, mais réciproque fausse : 4 points coplanaires ne sont pas forcément alignés.

🎯 Formules clés

Coordonnées : $\vec{u}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ **Norme** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **Distance** : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ **Colinéarité** : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ **Coplanarité** (3 vecteurs) : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Pour tester la colinéarité de 2 vecteurs : regarde si les coordonnées sont proportionnelles. C'est rapide.
- 🎯 La norme avec racine est essentielle dans tous les calculs de distance. Ne l'oublie pas.