Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Dérivation

الاشتقاق

📚 Résumé du cours

I. Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. On dit que f est **dérivable en** a si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cette limite s'appelle le **nombre dérivé de** f **en** a.

De manière équivalente, en posant $h = x - a$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation géométrique

$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a.

Équation de la tangente

$$T_a : \ y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

II. Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I, la fonction qui à chaque $x \in I$ associe $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f, notée f'.

III. Tableau des dérivées usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$

IV. Règles de dérivation

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I, et k une constante.

- $(u+v)' = u' + v'$

- $(ku)' = ku'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (si $v \neq 0$)
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ (fonction puissance composée)
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (si $u > 0$)

V. Lien entre dérivée et sens de variation

Théorème fondamental

Soit f dérivable sur un intervalle I :

- Si $f'(x) > 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points), alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si $f'(x) < 0$ sur I (sauf en un nombre fini de points), alors f est **strictement décroissante** sur I.
- Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est **constante** sur I.

Tableau de variations

Pour étudier les variations de f :

1. Déterminer le domaine D_f.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations.

VI. Extremums

Condition nécessaire

Si f admet un extremum local en x_0 (point intérieur du domaine) et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Attention : la réciproque est **fausse**. $f'(x_0) = 0$ n'implique pas un extremum (exemple : $f(x) = x^3$ en $x = 0$).

Critère pratique

f admet un extremum en x_0 si f' change de signe en x_0 :

- f' passe de positif à négatif → maximum
- f' passe de négatif à positif → minimum

VII. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

Solution :

1) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

$f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $]-1, 1[$.

2) Tableau :

- f croissante sur $]-\infty, -1]$
- f décroissante sur $[-1, 1]$
- f croissante sur $[1, +\infty[$

Maximum local en -1 : $f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$.

Minimum local en 1 : $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$.

3) $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$. Tangente : $y = 0(x - 1) + 0 = 0$. C'est l'axe des abscisses.

VIII. Top 6 pièges à éviter

1. **Confondre** $(uv)'$ **et** $u'v'$**.** La règle correcte : $(uv)' = u'v + uv'$.
2. **Confondre** $\left(\frac{u}{v}\right)'$ **et** $\frac{u'}{v'}$**.** La règle correcte : $\frac{u'v - uv'}{v^2}$.
3. **Oublier le** u' dans la dérivée d'une composée $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (et pas seulement nu^{n-1}).
4. **Croire que** $f'(x_0) = 0$ **⇒ extremum.** Faux. Il faut un changement de signe de f'.
5. **Oublier le domaine de dérivabilité.** Par exemple $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
6. **Confondre stricte monotonie et monotonie.** Strict : $f'(x) > 0$. Large : $f'(x) \geq 0$.

🎯 Formules clés

Nombre dérivé : $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ **Tangente en a** : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ **Dérivées usuelles** : - $(x^n)' = nx^{n-1}$ - $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ - $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ **Règles** : - $(uv)' = u'v + uv'$ - $(u/v)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ - $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ **Variation** : signe de f' **Extremum** : changement de signe de f'

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Avant de dériver, simplifie l'expression si possible (mise en facteur, identité remarquable). Ça évite des calculs lourds.
- 🎯 Pour étudier le signe de $f'(x)$ qui contient une expression compliquée : pose $f'(x) = 0$ et résous, puis fais un tableau de signes.
- 🎯 N'oublie jamais le u' dans les composées. C'est l'erreur n°1 du chapitre.