

# Généralités sur les fonctions numériques

عموميات حول الدوال العددية

## I. Vocabulaire de base

### Définition — Fonction numérique

Une **fonction numérique**  $f$  d'une variable réelle est une relation qui, à chaque réel  $x$  d'une partie  $D \subset \mathbb{R}$ , associe au plus un réel  $f(x)$ . On note :

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

- $D$  s'appelle **l'ensemble de définition** de  $f$ , noté  $D_f$
- $f(x)$  est **l'image** de  $x$  par  $f$
- Si  $y = f(x)$ , alors  $x$  est un **antécédent** de  $y$  par  $f$

### Ensemble de définition — les 3 règles à connaître

Pour trouver  $D_f$ , on cherche les  $x$  pour lesquels  $f(x)$  existe :

- **Quotient** :  $\frac{u(x)}{v(x)}$  exige  $v(x) \neq 0$
- **Racine carrée** :  $\sqrt{u(x)}$  exige  $u(x) \geq 0$
- **Logarithme** (vu plus tard) :  $\ln(u(x))$  exige  $u(x) > 0$

**Exemple résolu** : Déterminer  $D_f$  pour  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ .

- Racine :  $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

- Dénominateur non nul :  $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Donc  $D_f = [1, 3[ \cup ]3, +\infty[$ .

## II. Représentation graphique

Le **graphe** (ou courbe représentative) de  $f$  est l'ensemble :

$$C_f = \{M(x, f(x)); x \in D_f\}$$

dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

## III. Parité d'une fonction

### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D_f$  symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire :  $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ ).

- $f$  est **paire** si :  $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$
- $f$  est **impaire** si :  $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

### Conséquences graphiques

- Si  $f$  est paire  $\rightarrow C_f$  est **symétrique par rapport à l'axe**  $(Oy)$
- Si  $f$  est impaire  $\rightarrow C_f$  est **symétrique par rapport à l'origine**  $O$

### Exemple :

$f(x) = x^2$  est paire car  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ .

$g(x) = x^3$  est impaire car  $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ .

$h(x) = x^2 + x$  n'est ni paire ni impaire car  $h(-x) = x^2 - x \neq h(x)$  et  $\neq -h(x)$ .

### Méthode BAC pour étudier la parité

1. Vérifier que  $D_f$  est symétrique par rapport à 0. Sinon,  $f$  n'est ni paire ni impaire.
2. Calculer  $f(-x)$ .
3. Comparer à  $f(x)$  et  $-f(x)$ .

## IV. Périodicité

### Définition

$f$  est **périodique** de période  $T > 0$  si :

- $x \in D_f \Rightarrow x + T \in D_f$  et  $x - T \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(x + T) = f(x)$

La plus petite période strictement positive (si elle existe) s'appelle la **période principale**.

### Exemples fondamentaux

- $\sin$  et  $\cos$  sont  $2\pi$ -périodiques
- $\tan$  est  $\pi$ -périodique
- $x \mapsto \sin(2x)$  est  $\pi$ -périodique (la période est divisée par 2)

## V. Sens de variation

### Définition

Soit  $f$  définie sur un intervalle  $I$ . On dit que :

- $f$  est **croissante** sur  $I$  si :  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f$  est **strictement croissante** sur  $I$  si :  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $f$  est **décroissante** sur  $I$  si :  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- $f$  est **constante** sur  $I$  si :  $\forall x_1, x_2 \in I, f(x_1) = f(x_2)$

Une fonction **monotone** est croissante OU décroissante (sens unique).

### Méthode pour étudier le sens de variation (sans dérivée)

On utilise le **taux d'accroissement** :

$$T(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Si  $T(x_1, x_2) > 0$  pour tous  $x_1 \neq x_2$  dans  $I \rightarrow f$  strictement croissante
- Si  $T(x_1, x_2) < 0$  pour tous  $x_1 \neq x_2$  dans  $I \rightarrow f$  strictement décroissante

**Exemple :** Étudier les variations de  $f(x) = x^2$  sur  $[0, +\infty[$ .

Soient  $0 \leq x_1 < x_2$ . Alors  $T = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 > 0$ .

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

## VI. Extremums d'une fonction

### Définition

Soit  $f$  définie sur  $D$  et  $x_0 \in D$ .

- $f$  admet un **maximum** en  $x_0$  si :  $\forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)$ . La valeur  $f(x_0)$  est le maximum de  $f$ .
- $f$  admet un **minimum** en  $x_0$  si :  $\forall x \in D, f(x) \geq f(x_0)$
- Un **extremum** est soit un maximum, soit un minimum.

### Encadrement et extremums

Si  $\forall x \in D, m \leq f(x) \leq M$ , alors :

- $f$  est **minorée** par  $m$  (mais  $m$  n'est pas forcément atteint)
- $f$  est **majorée** par  $M$
- $f$  est **bornée**

## VII. Comparaison de fonctions et position relative

Pour comparer deux courbes  $C_f$  et  $C_g$  sur un intervalle  $I$ , on étudie le signe de  $f(x) - g(x)$  :

- $f(x) - g(x) > 0$  sur  $I$  :  $C_f$  est **au-dessus** de  $C_g$  sur  $I$
- $f(x) - g(x) < 0$  sur  $I$  :  $C_f$  est **en dessous** de  $C_g$  sur  $I$
- $f(x) - g(x) = 0$  : les courbes **se coupent** au point d'abscisse  $x$

## VIII. Méthode BAC type 2024

**Énoncé classique :** Soit  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ .

- 1) Déterminer  $D_f$ .
- 2) Étudier la parité de  $f$ .
- 3) Comparer  $f$  avec la fonction  $g : x \mapsto 2$ .

**Solution :**

**1)**  $f(x)$  existe si  $x - 1 \neq 0$ , soit  $x \neq 1$ . Donc  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**2)**  $D_f$  n'est pas symétrique par rapport à 0 (car  $1 \notin D_f$  mais  $-1 \in D_f$ ). Donc  $f$  n'est ni paire ni impaire.

**3)**  $f(x) - g(x) = \frac{2x+1}{x-1} - 2 = \frac{2x+1 - 2(x-1)}{x-1} = \frac{3}{x-1}$ .

Donc :

- Si  $x > 1$  :  $\frac{3}{x-1} > 0$  donc  $C_f$  est au-dessus de la droite  $y = 2$
- Si  $x < 1$  :  $\frac{3}{x-1} < 0$  donc  $C_f$  est en dessous de la droite  $y = 2$

## IX. Top 5 pièges à éviter

1. **Oublier la symétrie de  $D_f$**  avant d'étudier la parité. Si  $D_f$  n'est pas symétrique, la fonction n'est NI paire NI impaire, point final.
2. **Confondre "croissante au sens large" et "strictement croissante"**. La différence :  $\leq$  vs  $<$ . Pour montrer la stricte monotonie, il faut  $<$  strict.
3. **Confondre "bornée par M" et "maximum vaut M"**.  $f$  peut être bornée par  $M$  sans jamais l'atteindre (ex :  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  sur  $\mathbb{R}^+$ , bornée par 1 mais ne vaut jamais 1).
4. **Oublier le domaine** dans le tableau de variations. Toujours commencer par  $D_f$ .
5. **Confondre  $f(-x)$  et  $-f(x)$** .  $f(-x)$  = on remplace  $x$  par  $-x$  dans la formule.  $-f(x)$  = on prend l'opposé du résultat.

## X. À retenir

- $D_f$  : 3 règles (quotient, racine, log). Toujours commencer par là.
- **Parité** : 2 conditions (domaine symétrique +  $f(-x) = \pm f(x)$ ).
- **Périodicité** :  $\sin / \cos (2\pi)$ ,  $\tan (\pi)$ .
- **Sens de variation** : taux d'accroissement. La dérivée (chapitre suivant) sera plus rapide.
- **Comparaison de courbes** : étudier le signe de  $f - g$ .

### 🎯 Formules clés

\*\*Domaine de définition\*\* : - Quotient : dénominateur  $\neq 0$  - Racine : argument  $\geq 0$  - Log : argument  $> 0$   
\*\*Parité\*\* : - Paire :  $f(-x) = f(x)$ , symétrie /  $(Oy)$  - Impaire :  $f(-x) = -f(x)$ , symétrie / origine  
\*\*Périodicité\*\* :  $f(x + T) = f(x)$ , période  $T$  -  $\sin, \cos$  : période  $2\pi$  -  $\tan$  : période  $\pi$  \*\*Variation (taux d'accroissement)\*\* :  $T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  \*\*Comparaison de courbes\*\* : étudier le signe de  $f(x) - g(x)$

### 💡 Astuces & méthodes

- 🎯 **Pour la parité** : vérifie TOUJOURS la symétrie du domaine en premier. Si  $D_f$  n'est pas symétrique par rapport à 0, inutile de continuer —  $f$  n'est ni paire ni impaire.
- 🎯 **Pour le sens de variation** : si l'énoncé donne une expression compliquée, essaie d'abord d'écrire  $f(x_2) - f(x_1)$  et de factoriser par  $(x_2 - x_1)$ .
- 🎯 **Pour la périodicité** : retiens que  $\sin(\omega x)$  a pour période  $\frac{2\pi}{|\omega|}$ . Donc  $\sin(3x)$  a période  $\frac{2\pi}{3}$ .
- 🎯 **Pour comparer 2 courbes** : factoriser  $f(x) - g(x)$  pour faire apparaître le signe clairement (souvent un produit ou un quotient).