Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Géométrie analytique de l'espace

الهندسة التحليلية في الفضاء

📚 Résumé du cours

I. Repère orthonormé de l'espace

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec les 3 vecteurs orthogonaux unitaires.

Un point M a des coordonnées (x, y, z) telles que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

II. Représentation paramétrique d'une droite

Définition

La droite D passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par $\vec{u}(a, b, c)$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Comment trouver un vecteur directeur ?

Pour la droite (AB) : $\vec{u} = \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

III. Position relative de deux droites

Soient D dirigée par $\vec{u}$ et D' dirigée par $\vec{u'}$, passant par A et A'.

- **Parallèles confondues :** $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ colinéaires ET $A \in D'$
- **Parallèles strictement :** $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ colinéaires ET $A \notin D'$
- **Sécantes (intersection) :** $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ non colinéaires ET les droites se coupent en un point unique
- **Non coplanaires :** $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ non colinéaires ET les droites ne se rencontrent jamais

IV. Équation cartésienne d'un plan

Définition

Un plan $\mathcal{P}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de **vecteur normal** $\vec{n}(a, b, c)$ a pour équation cartésienne :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

soit $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Astuce

Les coefficients (a, b, c) de l'équation cartésienne sont les coordonnées d'un **vecteur normal** au plan !

V. Position relative droite / plan

$\vec{u}$ vecteur directeur de la droite, $\vec{n}$ vecteur normal du plan.

- **Droite parallèle au plan :** $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (et droite hors du plan)

- **Droite incluse dans le plan :** $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ ET un point de la droite appartient au plan
- **Droite sécante au plan :** $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0 \rightarrow$ un seul point d'intersection
- **Droite perpendiculaire au plan :** $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{n}$

VI. Distance d'un point à un plan

Distance de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au plan $\mathcal{P}$: $ax + by + cz + d = 0$:

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

VII. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soient $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$.
1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2) Calculer la distance du point $D(3, -1, 2)$ à ce plan.

Solution :

$\vec{AB}(1, 1, -2)$, $\vec{AC}(-1, 1, -1)$.
Cherchons $\vec{n}(a, b, c)$ orthogonal aux 2 : $a + b - 2c = 0$ et $-a + b - c = 0$.
En additionnant : $2b - 3c = 0$, donc $b = 3c/2$. Pour $c = 2$: $b = 3$, et $a = 2c - b = 4 - 3 = 1$.
Donc $\vec{n}(1, 3, 2)$.
Équation : $1(x - 1) + 3(y - 0) + 2(z - 2) = 0$, soit $\boxed{x + 3y + 2z - 5 = 0}$.
2) $d(D, (ABC)) = \dfrac{|3 + 3(-1) + 2(2) - 5|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{14}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

VIII. Top 5 pièges à éviter

1. **Confondre vecteur directeur (droite) et vecteur normal (plan).**
2. **Croire que 2 droites non parallèles sont sécantes.** Dans l'espace, elles peuvent être **non coplanaires**.
3. **Oublier le coefficient** d dans l'équation cartésienne.
4. **Oublier la valeur absolue** dans la formule de distance.
5. **Mal calculer un vecteur normal au plan** (ABC)**.** Il doit être orthogonal à $\vec{AB}$ ET $\vec{AC}$.

🎯 Formules clés

Droite (param.) : $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$ **Plan** (cartésien) : $ax + by + cz + d = 0$ - (a, b, c) = coords d'un vecteur normal **Distance point-plan** : $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ **Position relative** : utiliser $\vec{u} \cdot \vec{n}$ - $= 0$: parallèle / incluse - $\neq 0$: sécante

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Équation cartésienne d'un plan passant par 3 points : trouver $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (système 2×3).
- 🎯 Distance point-plan : exactement la même formule que distance point-droite, mais avec 3 variables.