Limites de fonctions

نهايات الدوال

📚 Résumé du cours

I. Limites en $+\infty$ et $-\infty$

Limite finie

Définition

On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si $f(x)$ se rapproche autant que l'on veut de ℓ pour x suffisamment grand.

Limite infinie

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ devient arbitrairement grand pour x assez grand.

II. Limites usuelles à connaître par cœur

Fonction	Limite en $+\infty$	Limite en $-\infty$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$+\infty$	$+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair
$\dfrac{1}{x^n}$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non définie

Limite en un point (limite finie)

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$: quand x se rapproche de a, $f(x)$ se rapproche de ℓ.

Si f est continue en a (cas le plus fréquent), alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Limite en un point (limite infinie)

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

III. Opérations sur les limites

Soient $\lim\limits_{x \to a} f = L$ et $\lim\limits_{x \to a} g = L'$.

- **Somme :** $\lim(f+g) = L + L'$ (sauf forme $+\infty - \infty$)
- **Produit :** $\lim(fg) = L \cdot L'$ (sauf forme $0 \times \infty$)
- **Quotient :** $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{L}{L'}$ (sauf $L' = 0$ ou forme $\dfrac{\infty}{\infty}$)

IV. Les 4 formes indéterminées (FI)

1. $\dfrac{0}{0}$
2. $\dfrac{\infty}{\infty}$
3. $\infty - \infty$
4. $0 \times \infty$

Dans ces 4 cas, on doit **"lever l'indétermination"**.

V. Méthode pour lever une FI

Cas $\frac{\infty}{\infty}$ (en $\pm\infty$, fraction de polynômes)

Factoriser numérateur et dénominateur par le terme dominant.

Exemple : $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^2-5} = \lim \frac{x^2(3+2/x-1/x^2)}{x^2(1-5/x^2)} = 3.$

Cas $\frac{0}{0}$ (en un point a)

Factoriser numérateur et dénominateur par $(x-a)$.

Exemple : $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim(x+2) = 4.$

Cas $\infty - \infty$

Factoriser par le terme dominant ou multiplier par la quantité conjuguée (s'il y a des racines).

Exemple : $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$

VI. Asymptotes

Asymptote horizontale

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$ (finie), alors C_f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$ en $\pm\infty$.

Asymptote verticale

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$.

VII. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soit $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-4}$. Étudier ses limites aux bornes de son domaine et déterminer les asymptotes.

Solution :

Domaine : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Limites en $\pm\infty$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim \frac{2x^2}{x^2} = 2$. Donc **asymptote horizontale** $y = 2$.

Limites en ± 2 : Le dénominateur tend vers 0 et le numérateur vers $2 \times 4 + 1 = 9 \neq 0$.
On étudie le signe de $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ → **asymptote verticale** $x = 2$.
Idem en -2 → **asymptote verticale** $x = -2$.

VIII. Top 5 pièges à éviter

1. **Écrire $\frac{0}{0} = 0$ ou $\frac{\infty}{\infty} = 1$.** Ce sont des FI, à lever obligatoirement.
2. **Oublier les limites à gauche / à droite** en un point où f n'est pas définie.
3. **Factoriser uniquement le numérateur** en $\frac{\infty}{\infty}$. Il faut factoriser les deux.
4. **Confondre asymptote horizontale et verticale.** Horizontale = limite finie en ∞. Verticale = limite infinie en un point fini.
5. **Oublier le signe du dénominateur** en limite "0+" vs "0-". Le signe détermine $+\infty$ ou $-\infty$.

🎯 Formules clés

Limites usuelles : - $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $(n \geq 1)$ - $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ - $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ **Les 4 FI :** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty$ **Méthode standard :** - $\frac{\infty}{\infty}$ (polynômes) → factoriser par terme dominant - $\frac{0}{0}$ (en a) → factoriser par $(x-a)$ - $\infty - \infty$ avec racines → quantité conjuguée **Asymptotes :** - $y = \ell$ si $\lim f = \ell$ en $\pm\infty$ - $x = a$ si $\lim f = \pm\infty$ en a

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 En $\pm\infty$, un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré. Une fraction rationnelle comme le rapport des termes dominants.
- 🎯 Quand tu vois $\frac{0}{0}$ et qu'il y a une racine, pense systématiquement à la **quantité conjuguée**.
- 🎯 Pour les limites en un point a où le dénominateur s'annule : étudier le SIGNE du dénominateur près de a pour décider entre $+\infty$ et $-\infty$.