Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Produit scalaire dans le plan

الجداء السلمي في المستوى

📚 Résumé du cours

I. Définition du produit scalaire

3 expressions équivalentes

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. **Coordonnées** (dans un repère orthonormé) : si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
2. **Angle :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$
3. **Norme :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

II. Propriétés algébriques

- **Symétrie :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Bilinéarité :** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- **Norme au carré :** $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

III. Orthogonalité

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux** ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

C'est **le critère** pour démontrer qu'on a un angle droit en géométrie analytique.

IV. Identités remarquables vectorielles

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

V. Applications géométriques

Calculer un angle

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Démontrer qu'un triangle est rectangle

Triangle ABC rectangle en A ssi $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.

Équation cartésienne d'une droite

Droite D passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$: $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, soit $ax + by + c = 0$.

Distance d'un point à une droite

Distance de $M_0(x_0, y_0)$ à D : $ax + by + c = 0$:

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

VI. Méthode BAC type 2024

Énoncé : $A(1,2)$, $B(4,-1)$, $C(5,3)$ dans un repère orthonormé.
1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
2) Le triangle ABC est-il rectangle en A ?
3) Calculer l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution :

$\vec{AB}(3,-3)$, $\vec{AC}(4,1)$, $\|\vec{AB}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\|\vec{AC}\| = \sqrt{17}$.

1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times 4 + (-3) \times 1 = 12 - 3 = 9$.

2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9 \neq 0$. Donc ABC **n'est pas rectangle** en A.

3) $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{9}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = \dfrac{9}{3\sqrt{34}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$. Donc $\widehat{BAC} \approx 59^\circ$.

VII. Top 5 pièges à éviter

1. **Croire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$.** Le produit scalaire donne un NOMBRE, pas un vecteur.
2. **Oublier la valeur absolue** dans la formule de distance à une droite.
3. **Confondre vecteur directeur et vecteur normal** d'une droite.
4. **Oublier le sin/cos dans le bon ordre.** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ utilise $\cos$ (pas $\sin$).
5. **Oublier de vérifier que les vecteurs sont non nuls** avant de dire "orthogonaux ssi produit scalaire = 0".

🎯 Formules clés

Produit scalaire : - Coordonnées : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ - Angle : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ **Orthogonalité** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ **Identités** : - $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ **Droite** : équation $ax + by + c = 0$, vecteur normal (a,b) **Distance point-droite** : $d(M_0, D) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Pour démontrer 2 droites perpendiculaires : montre que leurs vecteurs directeurs ont un produit scalaire nul.
- 🎯 Distance point-droite : N'OUBLIE PAS la valeur absolue au numérateur.