Suites numériques

المتتاليات العددية

📚 Résumé du cours

I. Définition d'une suite numérique

Définition

Une **suite numérique** est une fonction u définie d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. On note u_n au lieu de $u(n)$ et on note la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ou simplement (u_n).

- n s'appelle **l'indice** ou **le rang**
- u_n est **le terme général** ou **terme de rang** n

Les 2 modes de définition d'une suite

- **Formule explicite :** on connaît u_n en fonction de n. Ex : $u_n = 2n + 1$.
- **Relation de récurrence :** on connaît u_0 et une formule $u_{n+1} = f(u_n)$. Ex : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

II. Suites arithmétiques

Définition

(u_n) est **arithmétique** de raison r si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.

Formules à connaître par cœur

- **Terme général :** $u_n = u_0 + nr$
- **Forme générale :** $u_n = u_p + (n-p)r$ (à partir d'un rang p)
- **Somme :** $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

Comment reconnaître une suite arithmétique ?

Calculer $u_{n+1} - u_n$. Si c'est une **constante** (indépendante de n), c'est une suite arithmétique de raison cette constante.

> **Exemple :** $u_n = 3n - 2$. Alors $u_{n+1} - u_n = (3(n+1) - 2) - (3n - 2) = 3$. Donc (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$.

III. Suites géométriques

Définition

(u_n) est **géométrique** de raison q (avec $q \neq 0$) si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \cdot u_n$.

Formules à connaître par cœur

- **Terme général :** $u_n = u_0 \cdot q^n$
- **Forme générale :** $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$
- **Somme (si $q \neq 1$) :** $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

- **Somme (si $q = 1$) :** $S_n = (n+1)u_0$

Comment reconnaître une suite géométrique ?

Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (à condition que $u_n \neq 0$). Si c'est une **constante**, c'est une suite géométrique de raison cette constante.

> **Exemple :** $u_n = 5 \times 2^n$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 2^{n+1}}{5 \times 2^n} = 2$. Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 2$.

IV. Sens de variation d'une suite

Définition

- (u_n) est **croissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$
- (u_n) est **décroissante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$
- (u_n) est **constante** si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$

3 méthodes pour étudier le sens de variation

1. **Méthode 1 :** étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si $> 0 \to$ croissante. Si $< 0 \to$ décroissante.
2. **Méthode 2 (si tous les $u_n > 0$) :** comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Si $> 1 \to$ croissante. Si $< 1 \to$ décroissante.
3. **Méthode 3 (si $u_n = f(n)$ explicite) :** étudier le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.

V. Suites majorées, minorées, bornées

- (u_n) est **majorée** par M si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
- (u_n) est **minorée** par m si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée

VI. Méthode BAC type 2024

Énoncé classique : Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
1) Calculer u_1, u_2, u_3.
2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 3$ est géométrique.
3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Solution :

1) $u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$, $u_2 = 2 \times 5 + 3 = 13$, $u_3 = 2 \times 13 + 3 = 29$.

2) $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = (2u_n + 3) + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$.
Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 2$, et $v_0 = u_0 + 3 = 4$.

3) $v_n = v_0 \cdot q^n = 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$. Donc $u_n = v_n - 3 = 2^{n+2} - 3$.

VII. Top 6 pièges à éviter

1. **Confondre suite arithmétique et géométrique.** Arithmétique = on AJOUTE r. Géométrique = on MULTIPLIE par q.
2. **Oublier la condition** $q \neq 0$ pour la suite géométrique (sinon ce n'est plus une suite géométrique au sens strict).
3. **Mal compter le nombre de termes** dans la somme. $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ contient $n+1$ termes (pas n).
4. **Oublier de vérifier le premier terme** dans une démonstration par récurrence.
5. **Appliquer la formule** $S_n = u_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ **avec** $q = 1$**.** Diviser par 0 ! Utiliser le cas particulier $S_n = (n+1)u_0$.
6. **Confondre** u_{n+1} **et** $u_n + 1$**.** Le premier est "le terme suivant", le second est "le terme actuel plus 1".

🎯 Formules clés

Suite arithmétique (raison r, on AJOUTE) : - $u_{n+1} = u_n + r$ - $u_n = u_0 + nr$ - $S_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$ **Suite géométrique** (raison q, on MULTIPLIE) : - $u_{n+1} = q \cdot u_n$ - $u_n = u_0 \cdot q^n$ - $S_n = u_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (si $q \neq 1$) **Sens de variation :** - Signe de $u_{n+1} - u_n \to$ croissante / décroissante - Si $u_n > 0$, comparer u_{n+1}/u_n à 1

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 **Reconnaissance rapide** : calcule $u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$. Si égaux → arithmétique. Sinon, essaie u_1/u_0 et u_2/u_1. Si égaux → géométrique.
- 🎯 **Suite auxiliaire** v_n **géométrique** : technique classique du BAC. Quand $u_{n+1} = au_n + b$, pose $v_n = u_n - \ell$ où ℓ est le point fixe ($\ell = a\ell + b$).
- 🎯 **Mémorise la formule somme géométrique** : "1 moins q à la (n+1)" sur "1 moins q". Le piège est l'exposant $n+1$.