Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Barycentre

المرجح

📚 Résumé du cours

I. Barycentre de deux points pondérés

Définition

Soient A, B deux points du plan et α, β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Le **barycentre** des points pondérés (A ; α) et (B ; β) est l'unique point G tel que :

$$\alpha \cdot \vec{GA} + \beta \cdot \vec{GB} = \vec{0}$$

On note G = bar{(A, α) ; (B, β)}.

Expression du vecteur position

Pour tout point M du plan :

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{MG} = \alpha \cdot \vec{MA} + \beta \cdot \vec{MB}$$

En particulier, en prenant M = A : $\vec{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \vec{AB}$.

Cas particulier : isobarycentre

Si α = β, G est le **milieu** de [AB] : G = bar{(A,1); (B,1)}.

II. Propriétés fondamentales

Homogénéité

Pour tout k $\in \mathbb{R}^*$, bar{(A, kα) ; (B, kβ)} = bar{(A, α) ; (B, β)}.

On peut donc toujours se ramener à des coefficients de somme 1 (coordonnées barycentriques normalisées).

Appartenance à la droite (AB)

Le barycentre G de (A, α) et (B, β) (avec $\alpha + \beta \neq 0$) appartient à la droite (AB). Plus précisément :

- $G \in [AB]$ ⇔ α et β de **même signe**.
- $G \notin [AB]$ (extérieur à [AB]) ⇔ α et β de **signes opposés**.

III. Barycentre de trois points pondérés

Définition

Soient A, B, C et α, β, γ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Le barycentre G de (A, α), (B, β), (C, γ) est l'unique point tel que :

$$\alpha \cdot \vec{GA} + \beta \cdot \vec{GB} + \gamma \cdot \vec{GC} = \vec{0}$$

Pour tout M : $(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \vec{MG} = \alpha \cdot \vec{MA} + \beta \cdot \vec{MB} + \gamma \cdot \vec{MC}$.

IV. Théorème d'associativité

Associativité du barycentre

Si G = bar{(A, α), (B, β), (C, γ)} avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$, et si H = bar{(A, α), (B, β)}, alors :

G = bar{(H, α + β) ; (C, γ)}

On remplace deux points par leur barycentre partiel affecté de la somme de leurs coefficients.

Application : centre de gravité

Le centre de gravité G d'un triangle ABC est l'**isobarycentre** des trois sommets : G = bar{(A,1),(B,1),(C,1)}.

Par associativité avec A' milieu de [BC] : G = bar{(A, 1), (A', 2)}, donc $\vec{AG} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AA'}$. On retrouve que G est situé aux 2/3 de chaque médiane depuis le sommet.

V. Coordonnées du barycentre

Expression cartésienne

Dans un repère, si A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), alors G = bar{(A,α),(B,β),(C,γ)} a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\alpha \cdot x_A + \beta \cdot x_B + \gamma \cdot x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$
$$y_G = \frac{\alpha \cdot y_A + \beta \cdot y_B + \gamma \cdot y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

VI. Alignement et concours

Critère d'alignement

Trois points A, B, C sont alignés ⇔ il existe α, β, γ non tous nuls avec $\alpha + \beta + \gamma = 0$ tels que $\alpha \cdot \vec{A} + \beta \cdot \vec{B} + \gamma \cdot \vec{C} = \vec{0}$ (écriture affine).

Plus utile : si M = bar{(A, α), (B, β)} et N = bar{(A, α'), (C, γ')}, on peut utiliser l'associativité pour prouver l'alignement de M, N et d'un troisième barycentre.

Concours de droites

Pour montrer que trois droites sont concourantes, on peut chercher un point commun comme barycentre des points définissant chacune d'elles.

VII. Lignes de niveau avec MA² et MB²

Formule fondamentale (réduction)

Soient A, B, G le milieu de [AB]. Pour tout M :

$$MA^2 + MB^2 = 2 \cdot MI^2 + \frac{AB^2}{2} \text{ (où I est milieu)}$$
$$MA^2 - MB^2 = 2 \cdot \vec{MI} \cdot \vec{BA}$$

Ligne de niveau { M : α·MA² + β·MB² = k }

Si $\alpha + \beta \neq 0$, on pose G = bar{(A,α),(B,β)}. Alors :

$$\alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2 = (\alpha + \beta) \cdot MG^2 + \alpha \cdot GA^2 + \beta \cdot GB^2$$

La ligne de niveau est donc un **cercle** de centre G (ou l'ensemble vide, ou un point).

Si $\alpha + \beta = 0$, elle se ramène à $\vec{MA} \cdot \vec{u} = k$: c'est une **droite** perpendiculaire à (AB).

VIII. Ligne de niveau MA/MB = k

Cercle d'Apollonius

L'ensemble des points M tels que MA/MB = k (k > 0, $k \neq 1$) est un **cercle** dont le diamètre est [IJ] où :

- I = bar{(A, 1), (B, k)} (intérieur au segment)
- J = bar{(A, 1), (B, $-$k)} (extérieur)

Si k = 1 : c'est la **médiatrice** de [AB].

🎯 Formules clés

- **Définition :** $\alpha \cdot \vec{GA} + \beta \cdot \vec{GB} = \vec{0} \quad (\alpha + \beta \neq 0)$
- **Formule clé :** $(\alpha + \beta) \cdot \vec{MG} = \alpha \cdot \vec{MA} + \beta \cdot \vec{MB}$
- **Homogénéité :** bar{(A,kα),(B,kβ)} = bar{(A,α),(B,β)}
- **Associativité :** regrouper 2 points en leur barycentre partiel
- **Coordonnées :** $x_G = \dfrac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i}$
- **Isobarycentre triangle :** centre de gravité, aux 2/3 des médianes
- $\alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2 = k$ **:** réduction via G ⇒ cercle (ou droite si $\alpha + \beta = 0$)
- **MA/MB = k $\neq$ 1 :** cercle d'Apollonius

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Barycentre avec somme des coefficients nulle : si $\alpha + \beta = 0$, le barycentre n'est pas défini comme un point ! Dans ce cas, l'ensemble des M tels que $\alpha \cdot \vec{MA} + \beta \cdot \vec{MB} = \vec{0}$ est une droite perpendiculaire à (AB).

❌

Coordonnées du barycentre : $x_G = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i}$. Ne pas oublier de diviser par la somme des coefficients ! Si $\sum \alpha_i = 5$ et $\sum \alpha_i x_i = 10$, alors $x_G = 2$.

❌

Isobarycentre $\neq$ milieu : l'isobarycentre de 3 points A, B, C est le centroïde (centre de gravité du triangle), pas le milieu d'un côté.

🟢 Astuces de pros

✅

Associativité pour simplifier : pour trouver G = bar{(A,2),(B,3),(C,5)}, commence par I = bar{(A,2),(B,3)} (poids 5), puis G = bar{(I,5),(C,5)} = milieu de [IC].

✅

Réduction de $\alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2$: exprime tout en fonction de G = bar{(A,α),(B,β)} pour obtenir $\alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2 = (\alpha + \beta) \cdot MG^2 +$ constante. C'est l'équation d'un cercle !

💡

Méthode vecteurs pour trouver G : pose $\vec{GA} = A - G$, $\vec{GB} = B - G$, puis résous $\alpha \cdot \vec{GA} + \beta \cdot \vec{GB} = \vec{0}$ en coordonnées. C'est la méthode la plus directe.