Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Dérivation

الاشتقاق

📚 Résumé du cours

I. Nombre dérivé et tangente

Définition

Soit f définie sur un intervalle I et a ∈ I. On dit que f est **dérivable en a** si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a.

Interprétation géométrique

Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet en A(a ; f(a)) une **tangente** d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

f'(a) est le **coefficient directeur** de cette tangente.

Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en a, alors f est **continue** en a. *La réciproque est fausse* (ex. : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable).

II. Dérivabilité à droite / à gauche

Définitions

- $f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- $f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

f est dérivable en a ⇔ $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et sont **égales**.

Exemple : f(x) = |x| en 0. $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1 \Rightarrow$ f non dérivable en 0. La courbe présente un **point anguleux**.

III. Dérivées des fonctions usuelles

Tableau à connaître

f(x)	f'(x)	Domaine de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n (n ∈ $\mathbb{N}^*$)	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$1/x$	$-1/x^2$	$\mathbb{R}^*$
$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$]0, +\infty[$

sin(x)	cos(x)	$\mathbb{R}$
cos(x)	$-$sin(x)	$\mathbb{R}$
tan(x)	$1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$

IV. Opérations sur les dérivées

Règles de calcul

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(\lambda \cdot u)' = \lambda \cdot u'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $(1/v)' = -v'/v^2$ (si $v \neq 0$)
- $(u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v')/v^2$ (si $v \neq 0$)
- $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$ (si $u > 0$)

Dérivée d'une composée

Soit g dérivable en f(a) et f dérivable en a. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Cas particuliers :

- $(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u) \quad (\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$
- $(\tan(u))' = u' \cdot (1 + \tan^2(u)) = u'/\cos^2(u)$

V. Dérivée et sens de variation

Théorème fondamental

Soit f dérivable sur un intervalle I.

- $f' \geq 0$ sur I $\Leftrightarrow$ f **croissante** sur I
- $f' \leq 0$ sur I $\Leftrightarrow$ f **décroissante** sur I
- $f' = 0$ sur I $\Leftrightarrow$ f **constante** sur I
- $f' > 0$ sur I (sauf points isolés) $\Rightarrow$ f **strictement croissante** sur I

Étude des variations

1. Calculer f'(x).
2. Étudier le signe de f'(x) (factoriser, étudier discriminant, etc.).
3. Dresser le tableau de variations en précisant les limites aux bornes.
4. En déduire les extrema éventuels.

VI. Extrema locaux

Condition nécessaire

Si f admet un extremum local en a (a intérieur à I) et f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Réciproque fausse : f(x) = x^3 a $f'(0) = 0$ sans que 0 soit un extremum.

Condition suffisante (changement de signe)

Si f'(x) change de signe en a :

- + puis – ⇒ **maximum** local en a
- – puis + ⇒ **minimum** local en a

VII. Dérivées d'ordre supérieur

- $f'' = (f')'$: dérivée seconde
- $f'' > 0$ sur I ⇒ f est **convexe** (courbe tournée vers le haut)
- $f'' < 0$ sur I ⇒ f est **concave** (courbe tournée vers le bas)
- Un **point d'inflexion** est un point où f'' s'annule en changeant de signe

VIII. Approximation affine (tangente)

Développement au premier ordre

Si f est dérivable en a, alors au voisinage de a :

$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$$

pour h petit. La courbe est proche de sa tangente au voisinage du point de tangence.

🎯 Formules clés

- **Nombre dérivé :** $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- **Tangente :** $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
- **Usuelles :** $(x^n)' = nx^{n-1} \cdot (1/x)' = -1/x^2 \cdot (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x}) \cdot (\sin)' = \cos \cdot (\cos)' = -\sin$
- **Opérations :** $(uv)' = u'v + uv' \cdot (u/v)' = (u'v - uv')/v^2 \cdot (u^n)' = nu'u^{n-1}$
- **Composée :** $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$
- **Variations :** $f' \geq 0 \Leftrightarrow$ f croissante · $f' \leq 0 \Leftrightarrow$ f décroissante
- **Extremum local :** $f'(a) = 0$ et changement de signe de f'
- **Dérivabilité** ⇒ **continuité** (réciproque fausse)

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

$f'(a) = 0 \neq$ **extremum :** $f'(a) = 0$ est une *condition nécessaire* mais pas suffisante pour un extremum. Il faut vérifier le changement de signe de f'. Ex : f(x) = x^3 a $f'(0) = 0$ mais 0 est un point d'inflexion, pas un extremum.

❌

Dérivée de u/v : $(u/v)' = (\mathbf{u'v} - \mathbf{uv'})/v^2$. L'ordre est important ! "u prime v MOINS u v prime" — pas l'inverse. Une erreur d'ordre change le signe.

❌

Dérivabilité $\neq$ continuité : dérivable $\Rightarrow$ continue, mais continue $\nRightarrow$ pas forcément dérivable. La valeur absolue f(x) = |x| est continue en 0 mais pas dérivable.

🟢 Astuces de pros

✅

Équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Toujours calculer $f(a)$ et $f'(a)$ d'abord, puis substituer.

✅

Dérivée d'une composée f(g(x)) : = $g'(x) \cdot f'(g(x))$. "Dérivée de l'extérieur × dérivée de l'intérieur". Ex : $(\sin(x^2))' = 2x \cdot \cos(x^2)$.

💡

Tableau de variations : le signe de f' donne le sens de variation. Met $f'(x) = 0$, étudie le signe de f' sur chaque intervalle, puis déduis les variations et les extremums locaux.