Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Étude de fonctions

دراسة الدوال

Résumé du cours

I. Plan d'étude d'une fonction

Étapes à suivre

1. **Domaine de définition** D_f.
2. **Parité / périodicité** : réduction éventuelle du domaine d'étude.
3. **Limites aux bornes** de D_f (et continuité).
4. **Dérivée** $f'(x)$, signe, tableau de variations.
5. **Branches infinies** et **asymptotes**.
6. **Points particuliers** : intersections avec (Ox), (Oy), tangentes remarquables.
7. **Tracé** de la courbe C_f.

II. Asymptotes

Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à C_f.

Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$), la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à C_f en $\pm\infty$.

Asymptote oblique

La droite d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une **asymptote oblique** à C_f en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Méthode de recherche

1. Calculer $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si finie et non nulle, continuer.
2. Calculer $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$. Si finie, alors $y = ax + b$ est asymptote oblique.
3. **Position :** étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ pour savoir si C_f est au-dessus ou en dessous.

III. Branches paraboliques

Branche parabolique

Lorsqu'il n'y a pas d'asymptote oblique, on étudie $\lim \dfrac{f(x)}{x}$:

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$: **branche parabolique de direction (Oy)**.

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (avec $\lim f = \pm\infty$) : **branche parabolique de direction (Ox)**.
- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (fini non nul) et $\lim[f(x) - ax] = \pm\infty$: **branche parabolique de direction $y = ax$**.

IV. Éléments de symétrie

Axe de symétrie vertical $x = a$

C_f admet la droite $x = a$ comme axe de symétrie si :

$$\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x)$$

Cas particulier : $a = 0 \Leftrightarrow f$ **paire**.

Centre de symétrie $\Omega(a, b)$

C_f admet le point $\Omega(a; b)$ comme centre de symétrie si :

$$\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) + f(x) = 2b$$

Cas particulier : $\Omega = O \Leftrightarrow f$ **impaire**.

V. Position relative de deux courbes

Comparer C_f et C_g

Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $D_f \cap D_g$:

- $f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow C_f$ au-dessus de C_g
- $f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow C_f$ en dessous de C_g
- $f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow$ point d'intersection

VI. Points remarquables et tangentes

- **Intersection avec (Ox) :** résoudre $f(x) = 0$.
- **Intersection avec (Oy) :** calculer $f(0)$ si $0 \in D_f$.
- **Tangente horizontale :** $f'(x) = 0$.
- **Point à tangente verticale :** $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$.
- **Point d'inflexion :** $f''(x)$ s'annule en changeant de signe (changement de convexité).

VII. Étude réduite par parité ou périodicité

Domaine d'étude

- f **paire** : étudier sur $D_f \cap [0, +\infty[$, puis symétrie / (Oy).
- f **impaire** : étudier sur $D_f \cap [0, +\infty[$, puis symétrie / O.
- f **T-périodique** : étudier sur $[a, a + T]$, puis translations de vecteur $T\vec{i}$.

- **Combinaison** (périodique + paire/impaire) : étudier sur $[0, T/2]$.

VIII. Exemple-type : fonction rationnelle avec asymptote oblique

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

1. Domaine : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Division euclidienne : $x^2+1 = (x-1)(x+1)+2$, donc $f(x) = x+1+\dfrac{2}{x-1}$.

3. Limites : $\lim\limits_{x\to 1^+} f = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f = -\infty \Rightarrow x = 1$ **asymptote verticale**.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-(x+1)] = \lim \dfrac{2}{x-1} = 0 \Rightarrow y = x+1$ **asymptote oblique**.

4. Dérivée : $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2-2}{(x-1)^2}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

5. Variations : croissante sur $]-\infty, 1-\sqrt{2}]$, décroissante sur $[1-\sqrt{2}, 1[$, décroissante sur $]1, 1+\sqrt{2}]$, croissante sur $[1+\sqrt{2}, +\infty[$.

6. Position / asymptote oblique : $f(x)-(x+1) = \dfrac{2}{x-1}$. Positif si $x > 1$ (C_f au-dessus), négatif si $x < 1$ (en dessous).

7. Centre de symétrie : on vérifie que $f(2-x)+f(x) = 2\cdot 2 = 4$, donc $\Omega(1;2)$ est centre de symétrie.

🎯 Formules clés

- **Plan d'étude :** Domaine → Parité/Période → Limites → Dérivée et variations → Asymptotes/branches → Points remarquables → Tracé
- **Asymptote verticale :** $\lim\limits_{x\to a} f = \pm\infty \Rightarrow x = a$
- **Asymptote horizontale :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f = \ell \Rightarrow y = \ell$
- **Asymptote oblique** $y = ax+b$ **:** $a = \lim \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim[f(x)-ax]$
- **Position :** signe de $f(x)-(ax+b)$
- **Axe** $x = a$ **:** $f(2a-x) = f(x)$ · **Centre** $\Omega(a,b)$ **:** $f(2a-x)+f(x) = 2b$
- **Branches paraboliques :** si $\dfrac{f(x)}{x} \to \pm\infty$ direction (Oy), $\to 0$ direction (Ox)

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Asymptote horizontale ≠ pas d'intersection : une asymptote horizontale $y = \ell$ peut être franchie par la courbe — la définition dit juste que $f(x) \to \ell$ en $\pm\infty$, pas que $f(x) \neq \ell$ pour tout x fini !

❌

Asymptote oblique : ordre des calculs : d'abord calculer $a = \lim \dfrac{f(x)}{x}$, PUIS $b = \lim[f(x) - ax]$. Inverser l'ordre donne des erreurs.

❌

Oublier l'étude de position par rapport aux asymptotes : après avoir trouvé une asymptote $y = ax + b$, calculer le signe de $f(x) - (ax + b)$ pour savoir si la courbe est au-dessus ou en dessous.

🟢 Astuces de pros

✅

Plan d'étude dans l'ordre : ne pas sauter d'étapes ! Le domaine d'abord (il conditionne tout), puis la parité (qui réduit le travail de moitié si f est paire/impaire).

✅

Trouver les points d'inflexion : calculer f'', résoudre $f''(x) = 0$, vérifier que f'' change de signe. Le point d'inflexion est là où la courbure change de sens.

💡

Centre de symétrie : si $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie, alors $f(2a - x) + f(x) = 2b$ pour tout x. Vérifier cette relation algébriquement après avoir identifié le candidat.