Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Généralités sur les fonctions

عموميات حول الدوال

📚 Résumé du cours

I. Domaine de définition

Définition

Le **domaine de définition** D_f d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels f(x) existe.

Règles fondamentales

- **Dénominateur :** doit être $\neq 0$
- **Racine carrée** $\sqrt{u}$ **:** $u \geq 0$
- **Logarithme ln(u) :** $u > 0$ (hors programme 1BAC sauf rappels)
- **Polynôme :** défini sur $\mathbb{R}$

Exemple

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$. Conditions : $x - 1 \geq 0$ **et** $x - 3 \neq 0$, soit $x \geq 1$ et $x \neq 3$. Donc $D_f = [1; 3[\cup]3; +\infty[$.

II. Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont **égales** si et seulement si :

1. $D_f = D_g$ (mêmes domaines)
2. $\forall x \in D_f, f(x) = g(x)$

Attention : $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{x}$ ne sont PAS égales car $D_f = \mathbb{R}$ mais $D_g = \mathbb{R}^*$ (on exclut 0).

III. Représentation graphique

La **courbe représentative** C_f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ pour $x \in D_f$.

Translations et symétries

- $g(x) = f(x) + k$ **:** translation verticale de C_f de vecteur $k\vec{j}$
- $g(x) = f(x + a)$ **:** translation horizontale de vecteur $-a\vec{i}$
- $g(x) = -f(x)$ **:** symétrie par rapport à l'axe (Ox)
- $g(x) = f(-x)$ **:** symétrie par rapport à l'axe (Oy)
- $g(x) = |f(x)|$ **:** on rabat la partie sous (Ox) au-dessus

IV. Parité

Définitions

Soit f définie sur D_f tel que D_f est **symétrique par rapport à 0** (c'est-à-dire : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$).

- **f paire :** $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'**axe (Oy)**.
- **f impaire :** $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$. Sa courbe est symétrique par rapport à l'**origine O**.

Exemples : x^2 paire ; x^3 impaire ; cos paire ; sin impaire.

V. Périodicité

Définition

f est **périodique de période T** ($T > 0$) si :

1. $\forall x \in D_f, x + T \in D_f$
2. $\forall x \in D_f, f(x + T) = f(x)$

Pour étudier f, il suffit alors de l'étudier sur un intervalle de longueur T.

Exemples : cos et sin sont 2π-périodiques ; tan est π-périodique.

VI. Monotonie et taux d'accroissement

Définitions

Soit $I \subseteq D_f$. f est dite :

- **croissante sur I** si : $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- **décroissante sur I** si : $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- **constante sur I** si : $\forall x \in I, f(x) = c$

Taux d'accroissement

Pour $x_1 \neq x_2$ dans D_f, le **taux d'accroissement** est :

$$\tau = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Si $\tau > 0$ sur I $\Rightarrow$ f strictement croissante sur I
- Si $\tau < 0$ sur I $\Rightarrow$ f strictement décroissante sur I

VII. Extrema

- **Maximum sur I :** $\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$. On note max = $f(x_0)$, atteint en x_0.
- **Minimum sur I :** $\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)$.

f **majorée** : $\exists M, \forall x, f(x) \leq M$. f **minorée** : $\exists m, \forall x, f(x) \geq m$. f **bornée** : majorée et minorée, soit $\exists M, \forall x, |f(x)| \leq M$.

VIII. Opérations sur les fonctions

Soit f, g deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, définie sur $D_f \cap D_g$
- $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$, définie sur D_f

- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, définie sur $D_f \cap D_g$

- $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, définie sur $\{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$

Somme de fonctions monotones

- f et g croissantes sur I $\Rightarrow$ f + g croissante sur I
- f et g décroissantes sur I $\Rightarrow$ f + g décroissante sur I
- f et g croissantes ≥ 0 sur I $\Rightarrow$ f · g croissante sur I

IX. Composition de fonctions

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subseteq J$. La **composée** $g \circ f$ est définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ pour } x \in I$$

Monotonie de la composée

Soit f monotone sur I et g monotone sur f(I) :

- Si f et g sont de **même sens de variation** $\Rightarrow$ $g \circ f$ est **croissante.**
- Si f et g sont de **sens de variation opposés** $\Rightarrow$ $g \circ f$ est **décroissante.**

Exemple

$h(x) = \sqrt{x^2+1}$. Posons $f(x) = x^2 + 1$ et $g(u) = \sqrt{u}$. On a $h = g \circ f$.

Sur $]-\infty, 0]$: f décroissante (≥ 1) et g croissante $\Rightarrow$ h décroissante.

Sur $[0, +\infty[$: f croissante et g croissante $\Rightarrow$ h croissante.

🎯 Formules clés

- **Domaine :** dénominateur $\neq 0$, $\sqrt{u} \to u \geq 0$
- **Paire :** $f(-x) = f(x)$ (sym. axe Oy) · **Impaire :** $f(-x) = -f(x)$ (sym. O)
- **T-périodique :** $f(x+T) = f(x)$
- **Taux d'accroissement :** $\tau = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- **Composée :** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ · monotonie : même sens $\Rightarrow$ croissante
- **f majorée :** $\exists M, \forall x, f(x) \leq M$ · **bornée :** $\exists M, |f(x)| \leq M$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Domaine de $\sqrt{f(x)}$: il faut $f(x) \geq 0$. Ne pas oublier d'étudier le signe ! Et pour $\frac{1}{f(x)}$, il faut $f(x) \neq 0$ (pas $f(x) > 0$).

❌

Tester la parité correctement : vérifier d'abord que D est symétrique par rapport à 0. Si $D = [0, 1]$, la fonction ne peut être ni paire ni impaire (sauf si on peut la prolonger).

❌

Monotonie de $g \circ f$: si f croissante et g décroissante $\Rightarrow g \circ f$ DÉCROISSANTE. Deux sens opposés $\Rightarrow$ résultat décroissant. Ne pas systématiquement dire "croissante".

🟢 Astuces de pros

✅

Domaine d'une composée : $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$. Commence par trouver le domaine de g, puis filtre les x tels que g(x) soit dans le domaine de f.

✅

Exploiter la parité pour le tableau de variations : si f est paire, son tableau de variations est symétrique par rapport à $x = 0$. On peut ne l'étudier que sur $[0, +\infty[$ et compléter par symétrie.

💡

Taux d'accroissement = pente de la sécante : le taux $\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est la pente de la droite (AB) sur la courbe. Quand $b \to a$, τ tend vers $f'(a)$ = pente de la tangente.