Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Géométrie dans l'espace

الهندسة في الفضاء

📚 Résumé du cours

I. Positions relatives

Deux droites : parallèles, sécantes, confondues, ou **non coplanaires** (gauches — ni parallèles, ni sécantes).

Droite et plan : parallèle ($d \cap P = \emptyset$), sécante ($d \cap P = \{\text{un point}\}$), ou incluse dans P.

Deux plans : parallèles ($P \cap P' = \emptyset$), confondus, ou sécants ($P \cap P' = \text{une droite}$).

II. Droite perpendiculaire à un plan

Une droite d est **perpendiculaire à un plan** P ssi elle est perpendiculaire à **deux droites sécantes** de P passant par son pied H.

Conséquences :

- Si $d \perp P$ et $d' \parallel d$, alors $d' \perp P$.
- Si $d \perp P$ et $P \parallel P'$, alors $d \perp P'$.

Théorème des 3 perpendiculaires : Soit H le pied de la perpendiculaire à P depuis un point S, et Δ une droite de P. Si la projection Δ' de Δ sur P vérifie $\Delta' \perp SH$ dans P, alors $\Delta \perp (\text{plan } SH)$.

III. Plans et angles dièdres

L'**angle dièdre** formé par deux plans sécants est l'angle formé par deux demi-droites issues de la droite d'intersection, contenues dans chaque plan et perpendiculaires à cette droite.

Deux plans sont **perpendiculaires** ssi leur angle dièdre est 90°.

Un plan (P) est perpendiculaire à un autre (P') ssi (P) contient une droite perpendiculaire à (P').

IV. Repère orthonormé de l'espace

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout point M a des coordonnées $(x; y; z)$.

- **Distance :** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- **Milieu :** I de $[AB]$: $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Vecteur : $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$. Norme : $\|\vec{AB}\| = AB$.

Produit scalaire : $\vec{u}(x, y, z) \cdot \vec{v}(x', y', z') = xx' + yy' + zz'$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

V. Équation cartésienne d'un plan

Un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \text{ soit } ax + by + cz + d = 0$$

Distance d'un point M_0 à un plan : $d(M_0, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

VI. Volumes et surfaces des solides usuels

Solide	Volume	Aire latérale / totale
Cube (arête a)	a^3	$6a^2$
Pyramide	$\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$	$B + \Sigma(\text{faces lat.})$
Cylindre (R, h)	$\pi R^2 h$	$2\pi R^2 + 2\pi Rh$
Cône (R, h)	$\frac{1}{3}\pi R^2 h$	$\pi R^2 + \pi R\ell$
Sphère (R)	$\frac{4}{3}\pi R^3$	$4\pi R^2$

VII. Sphère — équation et intersection

La sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et rayon R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Intersection sphère-plan : $d = d(\Omega, P)$. Si $d < R$: cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Si $d = R$: point de tangence. Si $d > R$: vide.

🎯 Formules clés

- $\text{dist}(A, B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ **;** $\perp \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- **Plan :** $ax + by + cz + d = 0$ **; normal** $\vec{n}(a, b, c)$
- $d(M_0, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- $V(\text{pyramide}) = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ **;** $V(\text{sphère}) = \frac{4}{3}\pi R^3$
- **Sphère :** $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
- **Théorème des 3** $\perp$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Plan perpendiculaire $\neq$ droite perpendiculaire : le vecteur normal d'un plan $\vec{n}(a, b, c)$ est perpendiculaire au plan entier, pas juste à une droite. Toute droite de direction $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan.

❌

Théorème des 3 perpendiculaires (mal énoncé) : si une droite (d) est perpendiculaire à une droite (d') du plan, ce n'est PAS forcément qu'elle est $\perp$ au plan. Il faut que (d') passe par le pied de la perpendiculaire de (d) au plan.

❌

Volume de la pyramide : $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$, PAS $\frac{1}{4}$ ni $\frac{1}{2}$. Le facteur $\frac{1}{3}$ est propre aux pyramides et cônes (une dimension de moins que le prisme).

🟢 Astuces de pros

✅

Trouver l'équation d'un plan : tu as le vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ → équation : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, puis développe.

✅

Intersection droite-plan : paramètre la droite, substitue dans l'équation du plan, résous pour le paramètre t, puis retrouve le point d'intersection.

💡

Distance point-plan : $d(M_0, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. La valeur absolue au numérateur est indispensable — la distance est toujours positive !