Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Limites et continuité

النهايات والاتصال

📚 Résumé du cours

I. Notion de limite

Limite finie en un point

On dit que f admet ℓ **comme limite en a**, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, si f(x) peut être rendu aussi proche de ℓ qu'on veut dès que x est suffisamment proche de a.

Limite infinie

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$: f(x) dépasse tout réel M lorsque x est proche de a.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$: f(x) se rapproche de ℓ quand x devient très grand.

Unicité : si la limite existe, elle est unique.

II. Limites de référence

À connaître par cœur

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$ (n $\in \mathbb{N}^*$)
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = +\infty$ si n pair ; $-\infty$ si n impair
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Limites trigonométriques fondamentales

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

III. Opérations sur les limites

Soient $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$ (ℓ, ℓ' finis ou infinis). Alors :

- **Somme :** $\lim(f+g) = \ell + \ell'$ (sauf forme indéterminée "$+\infty - \infty$")
- **Produit :** $\lim(f\cdot g) = \ell \cdot \ell'$ (sauf "$0\cdot\infty$")
- **Quotient :** $\lim(f/g) = \ell/\ell'$ (sauf "$0/0$", "∞/∞" et $\ell' = 0$)

Les 4 formes indéterminées (FI)

$$+\infty - \infty \quad 0\cdot\infty \quad \infty/\infty \quad 0/0$$

IV. Lever les formes indéterminées

Polynômes en $\pm\infty$

La limite d'un polynôme en $\pm\infty$ est celle de son **terme de plus haut degré**.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-5x^2+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

Fonctions rationnelles en $\pm\infty$

La limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est celle du **quotient des termes de plus haut degré**.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{3x^2}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$.

Racines : multiplier par la quantité conjuguée

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$. On multiplie haut et bas par $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$:

$$=\lim\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\mathbf{0}.$$

Forme $0/0$: factoriser

Exemple : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim(x+2)=\mathbf{4}$.

V. Théorèmes de comparaison

Théorème des gendarmes

Si, au voisinage de a, on a $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ et $\lim u=\lim v=\ell$, alors $\lim f=\ell$.

Comparaison à l'infini

- Si $f(x)\geq u(x)$ et $\lim u=+\infty$, alors $\lim f=+\infty$.
- Si $f(x)\leq v(x)$ et $\lim v=-\infty$, alors $\lim f=-\infty$.

Passage à la limite dans les inégalités

Si $f(x)\leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim f=\ell$, $\lim g=\ell'$, alors $\ell\leq\ell'$.

VI. Limite et composition

Composition des limites

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ et $\lim\limits_{u\to b}g(u)=\ell$, alors $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=\ell$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(1/x)$. Posons $u=1/x$. Quand $x\to+\infty$, $u\to0$, et $\sin(u)\to0$. Donc la limite vaut **0**.

VII. Continuité en un point

Définition

f est **continue en a** ($a\in D_f$) si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

f est **continue sur un intervalle I** si elle est continue en tout point de I.

Continuité à droite / à gauche

- Continue à droite en a : $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- Continue à gauche en a : $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

f continue en a ⇔ continue à droite ET à gauche en a.

VIII. Opérations et continuité

Stabilité

Si f et g sont continues en a, alors :

- $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ sont continues en a.
- f/g est continue en a si $g(a) \neq 0$.
- $g \circ f$ est continue en a si g est continue en $f(a)$.

Fonctions usuelles continues

Sont continues sur leur domaine : polynômes, fractions rationnelles, $\sqrt{\cdot}$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $|x|$.

IX. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème (TVI)

Soit f continue sur [a, b]. Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un c ∈ [a, b] tel que $f(c) = k$.

Corollaire (cas strictement monotone)

Si f est continue et **strictement monotone** sur [a, b], alors pour tout k entre f(a) et f(b), il existe un **unique** c ∈ [a, b] tel que $f(c) = k$.

Application : existence d'une racine

Si f continue et $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans]a, b[.

Exemple : $f(x) = x^3 + x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow \exists c \in]0, 1[: f(c) = 0$. De plus f strictement croissante (somme de croissantes) ⇒ unicité.

X. Image d'un intervalle

Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Si f est continue sur **[a, b]** (segment fermé borné), alors $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \min f$ et $M = \max f$: f atteint ses bornes.

🎯 Formules clés

- **Limites de référence :** $\frac{1}{x^n} \to 0$ en $\pm\infty$ · $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ en 0 · $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$
- **Polynôme en** $\pm\infty$ **:** limite = terme dominant · **Rationnelle :** quotient des termes dominants
- **4 FI :** $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $0/0$ (à lever par factorisation ou conjugué)
- **Gendarmes :** $u \leq f \leq v$ et $\lim u = \lim v = \ell \Rightarrow \lim f = \ell$
- **Continuité en a :** $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- **TVI :** f continue sur [a,b], k entre f(a) et f(b) ⇒ $\exists c \in [a,b],\ f(c) = k$
- **TVI strict monotone :** unicité de c

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Forme indéterminée $0/0$ **:** ne jamais conclure "la limite n'existe pas". Il faut lever l'indétermination (factoriser, conjuguer, croissance comparée). Ex : $\lim \frac{x^2-1}{x-1} = \lim(x+1) = 2.$

❌

TVI : les hypothèses sont indispensables : f doit être *continue* sur [a,b] et k doit être *entre* f(a) et f(b). Si f n'est pas continue, le TVI ne s'applique pas !

❌

Limites à gauche ≠ limites à droite : pour une fraction avec un dénominateur qui s'annule, les limites à gauche et à droite peuvent être de signes opposés ($+\infty$ d'un côté, $-\infty$ de l'autre).

🟢 Astuces de pros

✅

Lever $+\infty - \infty$ **:** factoriser par le terme dominant. Ex : $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \to$ multiplier par le conjugué $(\sqrt{x^2+1} + x)$ au numérateur et dénominateur.

✅

Continuité et valeur en un point : si f est continue en a, calculer la limite revient à calculer f(a). Pour les fonctions "composées gentilles" (polynômes, sin, cos, exp, ln), c'est direct.

💡

TVI pour prouver l'existence d'une solution : si f continue change de signe sur [a,b] ($f(a) \cdot f(b) < 0$), alors l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans]a,b[. La dichotomie permet de l'approcher.