Logique mathématique

المنطق الرياضي

📚 Résumé du cours

I. Propositions et connecteurs logiques

Définition

Une **proposition** est un énoncé qui est soit vrai (V), soit faux (F).

Connecteurs logiques

- **Négation :** non P (notée $\neg P$ ou $overline P$). Vraie quand P est fausse.
- **Conjonction :** P et Q (notée $P \wedge Q$). Vraie quand P et Q sont toutes deux vraies.
- **Disjonction :** P ou Q (notée $P \vee Q$). Vraie quand au moins l'une est vraie.
- **Implication :** $P \Rightarrow Q$. Fausse uniquement quand P est vraie et Q fausse.
- **Équivalence :** $P \Leftrightarrow Q$. Vraie quand P et Q ont la même valeur de vérité.

II. Quantificateurs

- $\forall$ **(pour tout) :** $\forall x \in E, P(x)$ signifie que P(x) est vraie pour tout x de E.
- $\exists$ **(il existe) :** $\exists x \in E, P(x)$ signifie qu'il existe au moins un x dans E tel que P(x) est vraie.

Négation des quantificateurs

- $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$
- $\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x)$

III. Raisonnements mathématiques

- **Raisonnement direct :** On part de l'hypothèse pour arriver à la conclusion.
- **Contraposée :** $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- **Par l'absurde :** On suppose $\neg P$ et on aboutit à une contradiction.
- **Par récurrence :** Initialisation + Hérédité $\Rightarrow \forall n, P(n)$
- **Contre-exemple :** Pour réfuter $\forall x P(x)$, il suffit de trouver un x_0 tel que $\neg P(x_0)$.
- **Disjonction de cas :** On étudie tous les cas possibles séparément.

🎯 Formules clés

- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
- $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- $\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x)$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse uniquement quand P est vraie et Q fausse. Si P est fausse, l'implication est toujours vraie (ex vacuo). "0=1 $\Rightarrow$ la lune est en fromage" est une implication vraie !

❌

Confondre réciproque et contraposée : réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$ — qui n'est pas toujours vraie. La contraposée $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ est toujours équivalente à $(P \Rightarrow Q)$.

❌

Erreur de récurrence : oublier l'initialisation invalide tout le raisonnement. Même si l'hérédité est parfaite, sans initialisation la preuve est incomplète.

🟢 Astuces de pros

✅

Nier un quantificateur : $\neg(\forall x, P(x)) = \exists x, \neg P(x)$. Pour réfuter "tout entier est pair", il suffit de trouver UN entier impair.

✅

Choisir son raisonnement : si la contraposée ou l'absurde semble plus simple, utilise-les ! La contraposée est souvent plus naturelle pour les implications avec "si non...".

💡

Raisonnement par l'absurde : suppose la négation de ce qu'on veut prouver, déroule les implications jusqu'à une contradiction évidente (0=1, $\sqrt{2}$ rationnel, etc.).