1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Nombres complexes

الأعداد المركبة

📚 Résumé du cours

Chapitre 8 : Nombres complexes

I. Définition et forme algébrique

On pose $i^2 = -1$. Un nombre complexe s'écrit $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
$\mathrm{Re}(z) = a$ (partie réelle), $\mathrm{Im}(z) = b$ (partie imaginaire).
Conjugué : overline{z} $= a - bi$. **Module :** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

II. Opérations

Addition : $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
Multiplication : $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
Division : $z/w = z \cdot \overline{w}/|w|^2$
Propriétés : $|z \cdot w| = |z||w|$, $|z/w| = |z|/|w|$, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

III. Forme trigonométrique (polaire)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ (argument).
Formule de Moivre : $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$
Multiplication : $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

IV. Représentation géométrique (plan de Gauss)

Le plan complexe : tout point M(a,b) a pour **affixe** $z = a + bi$.
$|z| =$ distance à l'origine, $|z_1 - z_2| =$ distance entre les points d'affixes z_1 et z_2.
Milieu de [AB] : affixe $= (z_A + z_B)/2$

V. Forme exponentielle — notation d'Euler

Notation : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (formule d'Euler)
Forme exponentielle : $z = r \cdot e^{i\theta}$ où $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$
Propriétés : $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
Cas particuliers : $e^{i\pi} = -1$, $e^{i \cdot 2\pi} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$

VI. Racines n-ièmes de l'unité

Les solutions de $z^n = 1$ sont les n racines : $z_k = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$
Elles forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.
Racines carrées de −1 : $z = \pm i$; *racines cubiques de 1 :* $1, j = e^{2i\pi/3}, \overline{j} = e^{-2i\pi/3}$ avec $1 + j + \overline{j} = 0$

VII. Transformations géométriques par les complexes

Translation de vecteur affixe t : $f(z) = z + t$
Rotation de centre Ω (affixe a) et angle θ : $f(z) = e^{i\theta}(z - a) + a$
Homothétie de centre a et rapport k (réel) : $f(z) = k(z - a) + a$
Méthode : Pour trouver le centre d'une rotation $f(z) = e^{i\theta} \cdot z + b$, résoudre $f(\Omega) = \Omega$.

🎯 Formules clés

- $i^2 = -1, z = a + bi, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\overline{z} = a - bi, z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- **Forme trig :** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- **Forme exp :** $z = r \cdot e^{i\theta}, e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- **Moivre :** $z^n = r^n \cdot e^{in\theta}$
- **Racines de** $z^n = 1$ **:** $z_k = e^{2ik\pi/n}$
- **Rotation centre a, angle θ :** $f(z) = e^{i\theta}(z - a) + a$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Division en forme algébrique : pour calculer z_1/z_2, multiplier numérateur ET dénominateur par $\overline{z}_2$. Ne jamais "simplifier" directement partie réelle par partie réelle !

❌

Argument de $\overline{z}$ **:** $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ (symétrie par rapport à l'axe réel). Ne pas confondre avec $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$.

❌

Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ **:** s'applique à $e^{i\theta}$ mis à la puissance n. Attention si z n'est pas sur le cercle unité : il faut diviser par $|z|^n$ d'abord.

🟢 Astuces de pros

✅

Passer en forme exponentielle pour les puissances : $z = r \cdot e^{i\theta} \to z^n = r^n \cdot e^{in\theta}$. Beaucoup plus simple que de développer en forme algébrique !

✅

Trouver le centre d'une rotation : $f(z) = e^{i\theta} \cdot z + b \to$ centre ω tel que $f(\omega) = \omega \to \omega \cdot (1 - e^{i\theta}) = b \to \omega = \dfrac{b}{1 - e^{i\theta}}$.

💡

Formules d'Euler pour la trigonométrie : $\cos n\theta = \mathrm{Re}(e^{in\theta})$ et $\sin n\theta = \mathrm{Im}(e^{in\theta})$. Développer par Moivre permet de retrouver $\cos(2\theta)$, $\cos(3\theta)$, etc.