Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Probabilités

الاحتمالات

📚 Résumé du cours

Chapitre 7 : Probabilités

I. Vocabulaire

Expérience aléatoire : résultat imprévisible. **Univers Ω :** ensemble des issues.
Événement A ⊂ Ω. P(A) : probabilité de A, avec $0 \leq P(A) \leq 1$.
$P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

II. Opérations sur les événements

Union : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

III. Probabilité conditionnelle

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (probabilité de A sachant B)
Formule des probabilités totales :
Si (B_i) est une partition de Ω : $P(A) = \sum P(A|B_i) \times P(B_i)$

IV. Variables aléatoires et loi binomiale

Variable aléatoire X : $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$
Loi binomiale $B(n, p)$ **:** $P(X = k) = C(n, k) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$
$E(X) = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$

V. Arbre de probabilité

Règle de la branche : on multiplie les probabilités le long d'une branche.
Règle des chemins : on additionne les probabilités des chemins menant à l'événement.
Exemple : Urne I (3R, 2B), urne II (1R, 4B). On choisit une urne au hasard, puis une boule.
$P(\text{Rouge}) = P(\Omega_1) \cdot P(R|\Omega_1) + P(\Omega_2) \cdot P(R|\Omega_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$

VI. Variance et écart-type

Variance : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
Pour une loi binomiale $B(n, p)$: $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$
Propriétés : $V(aX + b) = a^2 V(X)$; $E(aX + b) = aE(X) + b$

VII. Formule de Bayes

Si $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ est une partition de Ω :
$P(B_k|A) = \dfrac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$
Exemple : diagnostic médical — probabilité d'être malade sachant que le test est positif (voir exercice dépistage).

🎯 Formules clés

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- **Indépendants :** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- **Probabilités totales :** $P(A) = \sum P(A|B_i)P(B_i)$
- **Bayes :** $P(B_k|A) = \dfrac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}$
- **Binomiale :** $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Indépendance ≠ incompatibilité : deux événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) ne sont JAMAIS indépendants (sauf si l'un a probabilité 0). Confondre ces deux notions est une erreur fréquente !

❌

Probabilité conditionnelle : bien identifier qui conditionne qui : $P(A|B) \neq P(B|A)$. "Probabilité d'être malade sachant que le test est positif" ≠ "probabilité d'être positif sachant qu'on est malade".

❌

Binomiale : vérifier les conditions : $X \sim B(n, p)$ seulement si les épreuves sont indépendantes et la probabilité p est constante. Si on tire sans remise, c'est une loi hypergéométrique !

🟢 Astuces de pros

✅

Formule des probabilités totales avec arbre : dessine l'arbre, puis $P(A)$ = somme des produits le long de chaque branche menant à A. Visuel et infaillible !

✅

Bayes = retour sur l'arbre : après avoir calculé $P(A)$ par les prob. totales, $P(B_k|A)$ = branche spécifique / total. Pense "quelle proportion de A vient de B_k ?"

💡

Espérance et variance de la binomiale : $E(X) = np$ (intuitif : n essais × proba de succès). $V(X) = np(1-p)$ — maximale quand $p = \dfrac{1}{2}$ (le plus "aléatoire").