Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Le produit scalaire

الجداء السلمي

Résumé du cours

I. Définition

Produit scalaire

$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dans un repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

II. Propriétés

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité)
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

III. Applications

Formule d'Al-Kashi

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(A)$

Aire du triangle

Aire $= \dfrac{1}{2}|ab \sin C|$

Projection orthogonale

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||^2} \cdot \vec{u}$$

🎯 Formules clés

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Al-Kashi : identifier le bon angle : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ où A est l'angle *opposé* au côté a. Ne pas prendre l'angle adjacent !

❌

Produit scalaire non commutatif en apparence : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (bien commutatif !), mais $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ n'a pas de sens — le produit scalaire de deux scalaires n'est pas défini.

❌

Orthogonalité ≠ vecteurs nuls : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ signifie orthogonalité OU l'un des vecteurs est nul. Préciser le cas si le vecteur nul est exclu.

🟢 Astuces de pros

✅

Développer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$: $= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Formule très utile pour retrouver un produit scalaire à partir de normes connues.

✅

Condition d'orthogonalité en coordonnées : $\vec{u}(x, y) \perp \vec{v}(x', y') \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$. Très rapide à vérifier sans calcul d'angle.

💡

Choisir la bonne formule du produit scalaire : si tu connais les coordonnées → $xx' + yy'$; si tu connais les normes et l'angle → $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$; si tu connais les distances → formule de polarisation.