1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

La rotation

الدوران

📚 Résumé du cours

I. Définition d'une rotation

Définition

Soient Ω un point du plan et θ un réel (angle orienté). La **rotation** de centre Ω et d'angle θ, notée **R(Ω, θ)**, est la transformation du plan qui associe à tout point M :

- M' = Ω si M = Ω
- M' tel que : **ΩM' = ΩM** et **($\overrightarrow{\Omega M}$, $\overrightarrow{\Omega M'}$) ≡ θ [2π]** sinon

Cas particuliers

- **θ = 0 :** R est l'identité.
- **θ = π :** R est la **symétrie centrale** de centre Ω.
- **θ = $\frac{\pi}{2}$:** « quart de tour direct » autour de Ω.

II. Propriétés fondamentales

Conservation des distances

Une rotation est une **isométrie** : si M' = R(M) et N' = R(N), alors :

M'N' = MN

Conservation des angles orientés

Pour toute rotation R d'angle θ, et tous points A, B, C distincts de leurs images :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ [2\pi]$$

De plus, pour tout vecteur $\vec{u}$ et son image $\vec{u}'$: **($\vec{u}$, $\vec{u}'$) ≡ θ [2π]**.

Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité

Une rotation conserve le parallélisme, l'orthogonalité, le milieu, les barycentres, les aires, les rapports de mesures algébriques.

Points fixes

Si θ ≢ 0 [2π], le seul point fixe de R(Ω, θ) est **Ω**.

III. Images des figures usuelles

Image d'une droite

L'image d'une droite D par la rotation R d'angle θ est une droite D' telle que l'angle orienté (D, D') ≡ θ [π] (angle de droites).

Image d'un cercle

L'image du cercle C(I, r) par une rotation R est le cercle C(I', r) de même rayon, où I' = R(I).

Image d'un segment / triangle

L'image du segment [AB] est le segment [A'B'] de même longueur. L'image d'un triangle est un triangle **directement semblable** (même sens, même forme, même taille — donc **isométrique**).

IV. Écriture complexe d'une rotation

Formule fondamentale

Dans le plan complexe, la rotation R(Ω, θ) avec Ω d'affixe ω s'écrit :

$$z' - \omega = e^{i\theta} \cdot (z - \omega)$$

soit $z' = e^{i\theta} \cdot z + (1 - e^{i\theta}) \cdot \omega$.

Reconnaissance

Si $z' = a \cdot z + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$, alors la transformation est une rotation :

- **Angle :** $\theta = \arg(a)$
- **Centre :** Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$

Si a = 1, c'est une **translation** de vecteur d'affixe b.

V. Composition de rotations

Même centre

$R(\Omega, \theta_1) \circ R(\Omega, \theta_2) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{\theta_2})$.

Centres différents

La composée $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est :

- Une **rotation** d'angle $\theta_1 + \theta_2$ si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0[2\pi]$.
- Une **translation** si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0[2\pi]$.

On détermine le centre (ou le vecteur de translation) par le calcul complexe.

Réciproque

La bijection réciproque de R(Ω, θ) est $R(\Omega, -\theta)$.

VI. Rotation et triangles remarquables

Triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral **direct** ssi la rotation $R(A, \frac{\pi}{3})$ transforme B en C :

$$c - a = e^{i\pi/3} \cdot (b - a) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$$

Triangle rectangle isocèle

ABC est rectangle isocèle direct en A ssi $R(A, \frac{\pi}{2})(B) = C$, soit $\frac{c-a}{b-a} = i$.

VII. Méthode générale pour résoudre un problème par rotation

Plan de résolution

1. **Identifier** une rotation R naturelle (centre = point fixe évident, angle = angle remarquable du problème).
2. **Appliquer R** à une figure clé : image d'un point, d'un segment, d'une droite.
3. **Utiliser les propriétés** (isométrie, conservation d'angle) pour conclure.

Exemple typique : dans un carré ABCD, montrer qu'une certaine somme de distances est égale ⇔ trouver la rotation qui échange les points concernés.

🎯 Formules clés

- **Définition :** $R(\Omega, \theta) : M \mapsto M'$ tq $\Omega M' = \Omega M$ et ($\overrightarrow{\Omega M}$, $\overrightarrow{\Omega M'}$) = θ
- **Écriture complexe :** $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
- **Reconnaissance :** $z' = az + b$ avec $|a| = 1$, $a \neq 1$ ⇒ rotation d'angle $\arg(a)$, centre $\omega = \frac{b}{1-a}$
- **Isométrie :** $M'N' = MN$ · conservation des angles orientés
- **Composition centres identiques :** $R(\Omega, \theta_1) \circ R(\Omega, \theta_2) = R(\Omega, \theta_1 + \theta_2)$
- **Centres différents :** rotation si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0[2\pi]$, sinon translation
- **Réciproque :** $R(\Omega, \theta)^{-1} = R(\Omega, -\theta)$
- **Triangle équilatéral direct :** $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Sens de rotation : angle positif = sens antihoraire, angle négatif = sens horaire. Respecter la convention des angles orientés !

❌

Trouver le centre d'une rotation : si $f(z) = e^{i\theta}z + b$, le centre n'est pas l'origine ! C'est $\omega = \frac{b}{1-e^{i\theta}}$. Ne pas oublier de résoudre $f(\omega) = \omega$.

❌

Composition de deux rotations de centres différents : si $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, la composition est une *translation* (pas une rotation). Vérifier toujours la somme des angles !

🟢 Astuces de pros

✅

Reconnaître une rotation : $f(z) = az + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1 \rightarrow$ rotation d'angle $\arg(a)$. Calculer $|a|$ en premier pour savoir si c'est une rotation ou une homothétie.

✅

Triangle équilatéral : ABC est équilatéral direct ssi $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cette condition encode à la fois $|BC| = |AB|$ et l'angle de 60°.

💡

Rotation + isométrie : une rotation conserve les distances ($|M'N'| = |MN|$) et les angles orientés. Ces deux propriétés sont les premières à utiliser pour prouver qu'un triangle est équilatéral/rectangle par rotation.