Atlasmaths

atlasmaths.com

1ÈRE BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Les suites numériques

المتتاليات العددية

📚 Résumé du cours

I. Généralités sur les suites

Définition

Une **suite numérique** (U_n) est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$. On note U_n le terme de rang n, également appelé terme général.

Modes de définition

- **Explicite :** $U_n = f(n)$, par exemple $U_n = 2n + 3$.
- **Récurrente :** U_0 donné et $U_{n+1} = f(U_n)$, par exemple $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$.

Sens de variation

- **Croissante :** $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n$ (strictement croissante si >)
- **Décroissante :** $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$ (strictement décroissante si <)
- **Monotone :** croissante ou décroissante
- **Constante :** $U_{n+1} = U_n$ pour tout n

Méthodes pour étudier la monotonie

1. **Étudier le signe de** $U_{n+1} - U_n$ (méthode la plus générale)
2. **Comparer** U_{n+1}/U_n **à 1** si tous les termes sont de même signe strict
3. **Étudier f** si $U_n = f(n)$: la monotonie de (U_n) suit celle de f sur $[0; +\infty[$

II. Suites arithmétiques

Définition

Une suite (U_n) est **arithmétique de raison r** si $U_{n+1} = U_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriétés fondamentales

- **Terme général :** $U_n = U_0 + nr$ ou $U_n = U_p + (n - p)r$
- **Sens de variation :** croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$, constante si $r = 0$
- **Somme des termes :** $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \dfrac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$

Formule générale : Somme = (nombre de termes) × (premier + dernier) / 2

III. Suites géométriques

Définition

Une suite (U_n) est **géométrique de raison q** $(q \neq 0)$ si $U_{n+1} = q \cdot U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriétés fondamentales

- **Terme général :** $U_n = U_0 \cdot q^n$ ou $U_n = U_p \cdot q^{n-p}$
- **Somme :** $S = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$, et $S = (n+1) \cdot U_0$ si $q = 1$

Sens de variation (cas $U_0 > 0$)

- $q > 1 \Rightarrow$ strictement croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow$ strictement décroissante
- $q < 0 \Rightarrow$ suite non monotone (alterne de signe)

IV. Raisonnement par récurrence appliqué aux suites

Principe

Pour démontrer qu'une propriété P(n) est vraie pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation :** vérifier que $P(n_0)$ est vraie
2. **Hérédité :** supposer P(n) vraie pour un $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence) et démontrer P(n+1)
3. **Conclusion :** P(n) est vraie pour tout $n \geq n_0$

Exemple type

Montrer que si $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$, alors $0 \leq U_n \leq 2$ pour tout n.

Init : $U_0 = 2$, donc $0 \leq U_0 \leq 2$. ✓

Hérédité : Si $0 \leq U_n \leq 2$, alors $2 \leq U_n + 2 \leq 4$, donc $\sqrt{2} \leq U_{n+1} \leq 2$. Comme $\sqrt{2} \geq 0$, on a $0 \leq U_{n+1} \leq 2$. ✓

V. Suites majorées, minorées, bornées

- **Majorée :** $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$
- **Minorée :** $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$
- **Bornée :** majorée ET minorée, c'est-à-dire $\exists M, \forall n, |U_n| \leq M$

Remarque : Toute suite croissante est minorée (par son premier terme U_0). Toute suite décroissante est majorée.

VI. Convergence — limite d'une suite

Définition

On dit que (U_n) **converge vers** ℓ (noté $\lim U_n = \ell$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |U_n - \ell| < \varepsilon$$

Sinon, la suite est **divergente** (soit elle tend vers $\pm\infty$, soit elle n'a pas de limite).

Limites de référence

- $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0$ $(\alpha > 0)$; $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

- $\lim n^\alpha = +\infty$ ($\alpha > 0$)
- **Suite géométrique q^n :**
  - si $|q| < 1$: $\lim q^n = 0$
  - si $q = 1$: suite constante égale à 1
  - si $q > 1$: $\lim q^n = +\infty$
  - si $q \leq -1$: pas de limite

VII. Théorèmes de convergence

Théorème de la limite monotone

- Toute suite **croissante et majorée converge** vers un réel ℓ.
- Toute suite **décroissante et minorée converge** vers un réel ℓ.
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Théorème de comparaison

Si à partir d'un certain rang $U_n \leq V_n$ et $\lim U_n = +\infty$, alors $\lim V_n = +\infty$.

Théorème des gendarmes (encadrement)

Si à partir d'un certain rang $V_n \leq U_n \leq W_n$ et si $\lim V_n = \lim W_n = \ell$, alors $\lim U_n = \ell$.

VIII. Suites auxiliaires et suites adjacentes

Suite auxiliaire $V_n = U_n - \ell$

Pour étudier une suite récurrente $U_{n+1} = a \cdot U_n + b$ ($a \neq 1$), on introduit $\ell = \dfrac{b}{1-a}$ (point fixe) et $V_n = U_n - \ell$. Alors (V_n) est géométrique de raison a, ce qui permet de trouver U_n explicitement.

Suites adjacentes

Deux suites (U_n) et (V_n) sont **adjacentes** si :

1. (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante
2. $\lim(V_n - U_n) = 0$

Théorème : deux suites adjacentes convergent vers la même limite ℓ, et pour tout n : $U_n \leq \ell \leq V_n$.

🎯 Formules clés

- **Arith :** $U_n = U_0 + nr$ · Somme = $\dfrac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$
- **Géom :** $U_n = U_0 \cdot q^n$ · Somme = $U_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- **Limite géométrique :** $\lim q^n = 0$ si $|q| < 1$; $+\infty$ si $q > 1$
- **Théorème monotone :** croissante + majorée ⇒ converge
- **Gendarmes :** $V_n \leq U_n \leq W_n$ et $V_n, W_n \to \ell \Rightarrow U_n \to \ell$
- **Point fixe :** si $U_n \to \ell$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f continue, alors $\ell = f(\ell)$
- **Récurrence arith-géom :** $U_{n+1} = aU_n + b \to V_n = U_n - \dfrac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Confondre raison et premier terme : pour une suite arithmétique $U_n = 3n+5$, $U_0 = 5$ (premier terme) et $r = 3$ (raison), pas l'inverse !

❌

Mauvaise formule de somme géométrique : la somme de U_0 à U_n contient **n+1 termes**. Somme = $U_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ — attention au +1 dans l'exposant !

❌

Oublier $|q| < 1$ pour la convergence géométrique : si $q = -2$, la suite diverge même si les termes alternent. Vérifier toujours la valeur absolue de q.

🟢 Astuces de pros

✅

Suite arith-géom → suite auxiliaire : pour $U_{n+1} = aU_n + b$, pose le point fixe $\ell = \dfrac{b}{1-a}$, puis $V_n = U_n - \ell$ est géométrique de raison a.

✅

Monotonie par comparaison : montrer $U_{n+1} - U_n > 0$ (arith) ou $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ (géom avec termes positifs) pour prouver la croissance.

💡

Gendarmes pratique : si tu connais des suites simples qui encadrent U_n, utilise-les. Ex : $\dfrac{\sin(n)}{n} \to 0$ car $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin(n)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ et les deux tendent vers 0.