Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Dérivation et étude de fonctions

الاشتقاق ودراسة الدوال

📚 Résumé du cours

I. Rappels de dérivation

Dérivées usuelles

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
- $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$

Règles de dérivation

- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (si $u > 0$)

II. Dérivée d'une fonction composée

Théorème

Si f est dérivable en $u(x)$ et u est dérivable en x, alors $f \circ u$ est dérivable en x et :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$$

Exemple : Dériver $h(x) = \sin(x^2 + 1)$.
Pose $u(x) = x^2 + 1,\ f(t) = \sin t$. Alors $u'(x) = 2x$ et $f'(t) = \cos t$.
$h'(x) = 2x \cos(x^2 + 1)$.

III. Plan d'étude d'une fonction (7 étapes)

1. **Domaine** D_f
2. **Parité, périodicité** (pour réduire l'étude)
3. **Limites aux bornes** de D_f
4. **Continuité et dérivabilité** sur D_f
5. **Signe de** f' et tableau de variations
6. **Asymptotes** (verticales, horizontales, obliques)
7. **Tracé de** C_f

IV. Asymptote oblique

$y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ ssi :

- $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (finie, non nulle)
- $b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$ (finie)

V. Concavité et point d'inflexion

- $f''(x) > 0 \to f$ **convexe** (courbe tournée vers le haut)
- $f''(x) < 0 \to f$ **concave** (courbe tournée vers le bas)
- Si f'' change de signe en x_0 → **point d'inflexion** en x_0

VI. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Étudier complètement $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Solution :

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Limites : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.
→ Asymptote verticale $x = 1$.

Asymptote oblique : Division : $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.
$f(x) - (x+1) = \frac{1}{x-1} \to 0$ en $\pm\infty$ → asymptote oblique $y = x + 1$.

Dérivée : $f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.
f' positif sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.
Maximum local en 0 : $f(0) = 0$. Minimum local en 2 : $f(2) = 4$.

VII. Top 6 pièges à éviter

1. **Confondre** $(uv)'$ **et** $u'v'$**.**
2. **Oublier le** u' dans les dérivées composées.
3. **Confondre asymptote oblique et direction asymptotique.**
4. **Étudier** f'' **sans avoir terminé** f'**.**
5. **Croire que** $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ **extremum** (ex : $f(x) = x^3$).
6. **Tracer sans tableau de variations.**

🎯 Formules clés

Dérivée composée : $(f \circ u)' = u' \cdot f'(u)$ **Plan d'étude** : 1. D_f • 2. Parité • 3. Limites 4. f' • 5. Tableau • 6. Asymptotes • 7. Tracé **Asymptote oblique** $y = ax + b$: $a = \lim f/x$, $b = \lim(f - ax)$ **Concavité** : signe de f'' - $f'' > 0$: convexe - $f'' < 0$: concave - changement de signe : inflexion

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Pour les fonctions rationnelles, utilise la **division euclidienne** pour trouver l'asymptote oblique : c'est instantané.
- 🎯 Le tableau de variations doit toujours inclure les limites aux bornes.