Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Fonctions exponentielles

الدوال الأسية

📚 Résumé du cours

I. La fonction exponentielle

Définition

La fonction **exponentielle**, notée $\exp$ ou e^x, est la fonction réciproque du logarithme népérien.

- $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$
- $(e^x)' = e^x$ (la dérivée est elle-même !)
- $e^0 = 1$, $e^1 = e$
- $\exp$ strictement croissante, toujours positive

Relation fondamentale

- $e^{\ln x} = x$ (si $x > 0$)
- $\ln(e^x) = x$ (pour tout x)
- $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ (avec $y > 0$)

II. Propriétés algébriques

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$:

- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

III. Limites importantes

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ (croissance comparée — l'exp gagne)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ (croissance comparée)

IV. Dérivée et équations

Dérivée composée

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

Équations

- $e^x = a$: si $a > 0$, $x = \ln a$; sinon pas de solution

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- Substitution $X = e^x$ pour ramener à une équation polynomiale

V. Fonction a^x (puissance générale)

Pour $a > 0$: $a^x = e^{x \ln a}$.

Dérivée : $(a^x)' = a^x \ln a$.

VI. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soit $f(x) = (x-1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

Solution :

1) En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$. Par croissance comparée, $\lim = 0$.
En $-\infty$: $x - 1 \to -\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$, donc $f(x) \to -\infty$.

2) $f'(x) = e^{-x} + (x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(1-(x-1)) = (2-x)e^{-x}$.
$e^{-x} > 0$, donc f' a le signe de $2 - x$.
f croissante sur $]-\infty, 2]$, décroissante sur $[2, +\infty[$.
Maximum en $x = 2$: $f(2) = e^{-2} \approx 0{,}135$.

VII. Top 5 pièges à éviter

1. **Écrire** $e^{a+b} = e^a + e^b$**.** FAUX (c'est $e^a \times e^b$).
2. $(e^u)' = e^u$**.** FAUX, il faut $u' \cdot e^u$.
3. **Croire que** $e^x = -2$ **a une solution.** FAUX, $e^x > 0$ toujours.
4. **Mal appliquer les croissances comparées** (ordre $\ln \ll x^n \ll e^x$).
5. **Pour** a^x**, dériver comme** xa^{x-1}**.** FAUX, il faut passer par $e^{x \ln a}$.

🎯 Formules clés

Définition : $\exp = \ln^{-1}$ $(e^x)' = e^x$, $e^0 = 1$, $e^x > 0$ **Propriétés** : - $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ - $e^{a-b} = e^a / e^b$ - $(e^a)^n = e^{na}$ **Limites** : - $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ - $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x / x^n = +\infty$ **Dérivée** : $(e^u)' = u' \cdot e^u$ **Équation** : $e^x = a$ (a > 0) $\Leftrightarrow x = \ln a$

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 $\exp$ transforme une SOMME en PRODUIT. Inverse du $\ln$.
- 🎯 Pour résoudre $e^{2x} + a \cdot e^x + b = 0$: pose $X = e^x$ et résous l'équation polynomiale en X.