Géométrie dans l'espace

الهندسة في الفضاء

📚 Résumé du cours

I. Produit scalaire dans l'espace

Définition

Pour $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Orthogonalité

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

II. Équations de plans

Équation cartésienne

Plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$:

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Plan par 3 points A, B, C non alignés

1) Calculer $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
2) Trouver $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (système).
3) Écrire l'équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

III. Équations de droites (paramétriques)

Droite D par A et $\vec{u}(a, b, c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

IV. Distances

Point - Plan

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Point - Droite

Plus complexe (passe par produit vectoriel ou projection orthogonale).

V. Sphères

Définition

> Sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et rayon R :
> $$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Intersection sphère - plan

Soit d = distance du centre Ω au plan.

- $d > R$: pas d'intersection
- $d = R$: tangent (1 point)
- $d < R$: cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

VI. Positions relatives droite - plan

$\vec{u}$ vecteur directeur de D, $\vec{n}$ vecteur normal de $\mathcal{P}$.

- $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$: D parallèle ou incluse dans $\mathcal{P}$
- $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$: D et $\mathcal{P}$ sécants en 1 point
- $\vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires : $D \perp \mathcal{P}$

VII. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soit $\Omega(1, 0, 2)$ et la sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et rayon 3. Le plan $\mathcal{P} : x + 2y + 2z - 5 = 0$ coupe-t-il $\mathcal{S}$?

Solution : $d(\Omega, \mathcal{P}) = \dfrac{|1+0+4-5|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{0}{3} = 0.$
Donc le plan passe par le centre Ω. L'intersection est un cercle de centre Ω et rayon $R = 3$ (grand cercle).

VIII. Top 5 pièges à éviter

1. **Confondre vecteur directeur et vecteur normal.**
2. **Oublier le** d dans l'équation cartésienne du plan.
3. **Oublier la valeur absolue** dans la distance point-plan.
4. **Confondre sphère et boule** (sphère = surface, boule = volume).
5. **Croire que 2 droites non parallèles sont sécantes** (peuvent être non coplanaires).

🎯 Formules clés

Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ **Plan** : $ax + by + cz + d = 0$ (a, b, c) = vecteur normal **Distance point-plan** : $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ **Sphère** : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Plan par 3 points : système d'équations pour trouver $\vec{n}$. C'est la méthode standard.
- 🎯 Pour intersection sphère/plan : calculer $d(\Omega, \mathcal{P})$ et comparer à R.