2ÈME BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Calcul intégral

الحساب التكاملي

📚 Résumé du cours

I. Primitives

Définition

Soit f continue sur un intervalle I. Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Deux primitives diffèrent d'une constante : si F et G sont 2 primitives de f, alors $G(x) = F(x) + C$ pour une constante C.

II. Primitives usuelles (à connaître par cœur)

$f(x)$	$F(x)$
x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
e^{ax+b}	$\dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Reconnaître $u' \cdot u^n$

- $\int u'u^n\, dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$
- $\int \dfrac{u'}{u}\, dx = \ln\lvert u\rvert + C$
- $\int u'e^u\, dx = e^u + C$
- $\int \dfrac{u'}{\sqrt{u}}\, dx = 2\sqrt{u} + C$

III. Intégrale définie

Définition

Soit f continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

IV. Propriétés

- **Linéarité :** $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$
- **Chasles :** $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

- **Positivité :** si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \geq 0$
- **Croissance :** si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$
- **Inversion bornes :** $\int_a^b f = -\int_b^a f$

V. Intégration par parties (IPP)

Formule

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Quand utiliser l'IPP ?

Pour intégrer un produit de 2 fonctions. **Choix de u (règle LIATE) :** Logarithme, Inverse trig, Algébrique, Trigonométrique, Exponentielle (dans cet ordre de préférence pour le facteur dérivé).

> **Exemple :** $\int_0^1 xe^x\,dx$.
> Pose $u = x$ ($u' = 1$), $v' = e^x$ ($v = e^x$).
> $= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$.

VI. Calcul d'aires

Aire entre C_f et l'axe des abscisses, entre a et b :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$: $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$.

VII. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Solution : On reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$? Non, ici c'est $u' \cdot u$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = 1/x$.

Donc primitive : $\frac{u^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$.

$I = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

VIII. Top 6 pièges à éviter

1. **Oublier** $+C$ dans une primitive (sans bornes).
2. **Inverser les bornes** sans changer le signe.
3. **Oublier** $|\cdot|$ dans $\ln|x|$.
4. **Confondre $\int u'v$ et $\int uv'$** dans l'IPP.
5. **Calculer une aire sans valeur absolue** quand f change de signe.
6. **Oublier le coefficient** $1/a$ dans la primitive de e^{ax+b}.

🎯 Formules clés

Primitives usuelles : - $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ - $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ - $\int e^x dx = e^x + C$ **Formes composées** : - $\int u'/u \, dx = \ln|u| + C$ - $\int u' e^u \, dx = e^u + C$ **Intégrale** : $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ **IPP** : $\int u'v = [uv] - \int uv'$ **Aire** : $\int_a^b |f(x)| dx$

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Pour les IPP, choisir u via LIATE (Log, Inverse-trig, Algébrique, Trigonométrique, Exponentielle).
- 🎯 Avant de chercher une primitive complexe, regarder si l'expression est de la forme $u' \cdot g(u)$.