Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Limites et continuité

النهايات والاتصال

📚 Résumé du cours

I. Rappels sur les limites

Limites usuelles à connaître par cœur

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \ (n \geq 1)$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty, \ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

II. Les 4 formes indéterminées

1. $\dfrac{0}{0} \to$ factoriser par $(x-a)$ ou utiliser limites de référence
2. $\dfrac{\infty}{\infty} \to$ factoriser par le terme dominant
3. $\infty - \infty \to$ factoriser ou quantité conjuguée (si racines)
4. $0 \times \infty \to$ transformer en $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$

III. Continuité

Définition

f est **continue en** a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Fonctions usuellement continues

- Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine
- $\sin, \cos, \sqrt{\cdot}, \exp$ continues sur leurs domaines
- Somme, produit, composée de fonctions continues = continue

IV. Prolongement par continuité

Si f n'est pas définie en a mais $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ existe et est finie, on peut prolonger f en posant $\tilde{f}(a) = \ell$. Le prolongement $\tilde{f}$ est continu en a.

V. Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Énoncé

> Si f est continue sur $[a,b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire (TVI strict / bijection)

Si f est continue ET **strictement monotone** sur $[a,b]$, alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **UNIQUE** $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Application classique au BAC SE

"Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur I".

Méthode :

1. Justifier f continue sur I
2. Justifier f strictement monotone (signe de f')
3. Montrer que $f(a) \cdot f(b) < 0$
4. Conclure par TVI strict

VI. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soit $f(x) = x^3 + x - 1$.
1) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$.

Solution :

1) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout x. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) f continue (polynôme) et strictement croissante sur $[0,1]$.
$f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. Donc $f(0) \cdot f(1) < 0$.
Par TVI strict, il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

VII. Top 5 pièges à éviter

1. **Écrire** $\frac{0}{0} = 0$: c'est une FI, à lever.
2. **Appliquer le TVI sans justifier la continuité.**
3. **Oublier la stricte monotonie** dans le TVI strict.
4. **Conclure "il existe" au lieu de "il existe UN seul"** alors qu'on demande l'unicité.
5. **Confondre limite à gauche et à droite** aux bornes du domaine.

🎯 Formules clés

Limites usuelles : - $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ - $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ **4 FI** : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty$ **Continuité** : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ **TVI strict** : f continue + strictement monotone + $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow$ unique solution $\alpha \in]a,b[$

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 TVI strict = 3 conditions OBLIGATOIRES : continue, strictement monotone, changement de signe.
- 🎯 Si tu vois "unique solution", pense automatiquement TVI strict.