Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Fonctions logarithmes

الدوال اللوغاريتمية

📚 Résumé du cours

I. La fonction logarithme népérien

Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est définie sur $]0, +\infty[$ par :

- $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ (où $e \approx 2{,}718$)
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

II. Propriétés algébriques (à connaître par cœur)

Pour $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$

III. Limites importantes

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée)
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (croissance comparée)

IV. Dérivée et équations

Dérivée composée

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ (si $u > 0$)

Équations et inéquations

- $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$ (avec $x > 0$)
- $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a$
- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ (avec $x, y > 0$)

V. Logarithme décimal

$\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$: utilisé en sciences physiques (pH, décibels...).
$\log(10) = 1$, $\log(100) = 2$, etc.

VI. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soit $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0, +\infty[$.
1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
2) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations.

Solution :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ (croissance comparée), donc $\lim f(x) = 0 - 0 = 0$.

2) $f'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$.
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
f décroissante sur $]0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$.
Minimum en $x = 1$: $f(1) = 1 \times 0 - 1 = -1$.

VII. Top 5 pièges à éviter

1. **Écrire** $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$**.** FAUX. La formule correcte est $\ln(ab)$.
2. **Calculer** $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}$**.** FAUX, il faut $\dfrac{u'}{u}$.
3. **Oublier la condition** $u > 0$ pour $\ln u$.
4. **Résoudre** $\ln(x) = -2$ en oubliant que $x = e^{-2} > 0$, donc solution valide.
5. **Croire que** $\ln x < 0$ **implique** $x < 0$**.** FAUX, $\ln x < 0$ ssi $0 < x < 1$.

🎯 Formules clés

Définition : $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $(\ln x)' = 1/x$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ **Propriétés** : - $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ - $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ - $\ln(a^n) = n \ln a$ **Limites** : - $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ - $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x / x = 0$ **Dérivée** : $(\ln u)' = u'/u$ **Équation** : $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 $\ln$ transforme un PRODUIT en SOMME. Très utile pour dériver des fonctions complexes.
- 🎯 Pour résoudre $\ln u(x) = \ln v(x)$: vérifier $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$, puis $u = v$.