Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Nombres complexes

الأعداد العقدية

📚 Résumé du cours

I. Définition et formes

Définition

L'ensemble des **nombres complexes** $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$. Tout nombre complexe z s'écrit :

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- $a = \mathrm{Re}(z)$: partie réelle
- $b = \mathrm{Im}(z)$: partie imaginaire

Conjugué

$\bar{z} = a - ib$. Propriétés :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$
- $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

II. Module et argument

Module

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Propriétés :

- $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|zz'| = |z||z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Argument

Si $z \neq 0$, on note $\arg(z) = \theta$ tel que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

III. Forme trigonométrique et exponentielle

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Calculs en forme exponentielle

- $z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$ (formule de Moivre)

IV. Équations du second degré

Pour $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels :

- Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Si $\Delta > 0$: 2 solutions réelles $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$: 1 solution double $z = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$: 2 solutions complexes conjuguées $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

V. Représentation géométrique

$z = a + ib$ correspond au point $M(a, b)$ dans le plan complexe.

- $|z| = OM$ (distance à l'origine)
- $\arg(z) = (\vec{i}, \vec{OM})$
- $|z_B - z_A| = AB$
- $\arg(z_B - z_A) = (\vec{i}, \vec{AB})$

VI. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$.
1) Calculer $|z|$ et $\arg(z)$.
2) Écrire z sous forme exponentielle.
3) En déduire z^6.

Solution :

1) $|z| = \sqrt{1+3} = 2$.
$\cos\theta = \dfrac{1}{2}, \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \to \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

2) $z = 2e^{i\pi/3}$.

3) $z^6 = 2^6 e^{i6\pi/3} = 64e^{i2\pi} = 64 \cdot 1 = 64$.

VII. Top 5 pièges à éviter

1. **Confondre** $|z|$ **et** $|z|^2$**.**
2. **Oublier la racine carrée** dans le module.
3. $\arg(z)$ **modulo** 2π**.** Plusieurs valeurs équivalentes.
4. **Pour** $\Delta < 0$**, écrire** $\sqrt{\Delta}$**.** Il faut $i\sqrt{-\Delta}$.
5. **Confondre** $\bar{z}$ **(conjugué) et** $-z$ **(opposé).**

🎯 Formules clés

Formes : - Algébrique : $z = a + ib$ - Trigo : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ - Exponentielle : $z = re^{i\theta}$ **Module** : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ **Conjugué** : $\bar{z} = a - ib$, $z\bar{z} = |z|^2$ **Calculs en exp** : - $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ - $z^n = r^n e^{in\theta}$ (Moivre) **Équation $az^2 + bz + c = 0$** ($\Delta < 0$) : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Pour les puissances z^n : passer en forme exponentielle, multiplier l'argument par n.
- 🎯 Pour vérifier l'argument : sin et cos doivent être cohérents (mêmes signes que les composantes du nombre).