Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES EXPÉRIMENTALES · FICHE DE COURS

Suites numériques

المتتاليات العددية

📚 Résumé du cours

I. Rappels (suites arithmétiques et géométriques)

	Arithmétique	**Géométrique**
Raison	r (on ajoute)	q (on multiplie)
Récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \cdot u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 q^n$
Somme	$S_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$	$S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (si $q \neq 1$)

II. Convergence d'une suite

Définition

(u_n) **converge** vers ℓ si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (limite finie).

Sinon, on dit que (u_n) **diverge**.

Cas particulier : suites géométriques

- Si $|q| < 1$: $\lim q^n = 0$, donc $u_n = u_0 q^n \to 0$
- Si $q = 1$: $u_n = u_0$ (constante)
- Si $q > 1$: $\lim q^n = +\infty \to$ diverge
- Si $q \leq -1$: pas de limite (oscille)

III. Théorèmes de convergence

Théorème de convergence monotone

Toute suite **croissante et majorée** converge.

Toute suite **décroissante et minorée** converge.

Théorème des gendarmes

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.

IV. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Méthode standard

1. Montrer par récurrence que $u_n \in I$ (intervalle stable par f)
2. Étudier le sens de variation de (u_n) : comparer u_1 et u_0, puis raisonner
3. Si croissante + majorée OU décroissante + minorée $\to$ convergence
4. Si (u_n) converge vers ℓ et f continue : $\ell = f(\ell)$

V. Raisonnement par récurrence

Principe

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation :** vérifier $P(n_0)$
2. **Hérédité :** supposer $P(n)$ vraie et démontrer $P(n+1)$
3. **Conclusion :** par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

VI. Méthode BAC type 2024

Énoncé : Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
1) Montrer par récurrence que $u_n < 6$ pour tout n.
2) Montrer que (u_n) est croissante.
3) En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.

Solution :

1) Init : $u_0 = 1 < 6$ ✓.
Hérédité : supposons $u_n < 6$. Alors $\frac{u_n}{2} < 3$, et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3 < 3 + 3 = 6$ ✓.
Donc $u_n < 6$ pour tout n.

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + 3 - u_n = 3 - \frac{u_n}{2} > 0$ car $u_n < 6$.
Donc (u_n) est croissante.

3) Croissante et majorée → converge vers ℓ.
Par continuité : $\ell = \frac{\ell}{2} + 3 \Rightarrow \frac{\ell}{2} = 3 \Rightarrow \ell = 6$.

VII. Top 5 pièges à éviter

1. **Oublier l'initialisation** dans la récurrence.
2. **Croire que u_n bornée ⇒ u_n converge.** FAUX (ex : $u_n = (-1)^n$).
3. **Conclure $\ell = f(\ell)$ sans justifier la continuité.**
4. **Oublier que pour $|q| < 1$, $q^n \to 0$** (cas suite géométrique).
5. **Croire que $u_n \to \ell \Rightarrow u_n$ atteint ℓ.** Pas nécessairement.

🎯 Formules clés

Convergence : $\lim u_n = \ell$ (finie) **Suite géométrique** : - $|q| < 1$: $u_n \to 0$ - $|q| > 1$: $u_n \to \pm\infty$ **Convergence monotone** : croissante + majorée → converge **Gendarmes** : $v_n \leq u_n \leq w_n$, $v, w \to \ell$ $\Rightarrow u_n \to \ell$ **Récurrence** : $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n \to \ell$, f continue $\Rightarrow \ell = f(\ell)$ **Récurrence math** : init + hérédité + conclusion

💡 Astuces & méthodes

- 🎯 Pour la convergence : croissante + majorée OU décroissante + minorée. C'est LA méthode standard.
- 🎯 Astuce pour trouver ℓ : résoudre $\ell = f(\ell)$ AVANT de prouver la convergence. Tu auras le candidat-limite.