Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Calcul intégral

التكامل

📚 Résumé du cours

I. Primitives

Définition

F est une **primitive** de f sur I si F'(x) = f(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si F est une primitive de f, alors toute primitive est de la forme F + C ($C \in \mathbb{R}$).

Primitives usuelles

f(x)	F(x)
x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u' \cdot e^u$	e^u
$u' \cdot u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

II. Intégrale définie

Théorème fondamental

Si f est continue sur [a,b] et F est une primitive de f, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Propriétés

- **Linéarité :** $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha\int f + \beta\int g$
- **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$
- **Positivité :** Si $f \geq 0$ sur [a,b], alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$
- **Inégalité :** Si $f \leq g$ sur [a,b], alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$
- **Valeur absolue :** $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

III. Intégration par parties

$$\int_a^b u \cdot v' \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \, dx$$

IV. Calcul d'aires

Aire entre C_f et l'axe des x sur [a,b] : $A = \displaystyle\int_a^b |f(x)| \, dx$

Aire entre deux courbes C_f et C_g : $A = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$

V. Valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

🎯 Formules clés

- $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- IPP : $\displaystyle\int uv' = [uv] - \int u'v$
- Aire = $\displaystyle\int |f(x)| \, dx$
- Valeur moyenne = $\displaystyle\frac{1}{b-a} \cdot \int f(x) \, dx$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Aire entre deux courbes sans valeur absolue : $A = \int |f(x) - g(x)| \, dx$. Si les courbes se croisent sur [a,b], il faut découper l'intervalle là où $f(x) = g(x)$ et sommer les aires partielles !

❌

IPP : choisir u et v' correctement : pour $\int x \cdot e^x \, dx$, prendre $u = x$ ($u' = 1$) et $v' = e^x$ ($v = e^x$). Si on prend $u = e^x$ et $v' = x$, l'intégrale devient plus complexe !

❌

$\int_a^b f(x) \, dx$ **peut être négatif :** l'intégrale est la somme algébrique des aires (positives au-dessus de l'axe, négatives en dessous). Pour l'aire géométrique, prendre la valeur absolue de chaque partie.

🟢 Astuces de pros

✅

Méthode IPP — règle LIATE : choisir u dans l'ordre : Logarithme, Inverse, Algébrique (polynôme), Trigonométrique, Exponentielle. Le premier de la liste = u. Ex : $\int x \cdot \ln(x) \, dx \to u = \ln(x)$, $v' = x$.

✅

Changement de variable : poser $t = g(x) \longrightarrow dt = g'(x)dx$. Changer les bornes ($x = a \to t = g(a)$, $x = b \to t = g(b)$) puis intégrer en t. Ne pas oublier de changer les bornes !

💡

Vérifier une primitive : dériver F pour vérifier $F' = f$. Toujours faire cette vérification rapide après calcul d'une primitive complexe — cela évite les erreurs de signe ou de coefficient.