2ÈME BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Dénombrement

التعداد

📚 Résumé du cours

I. Factorielle d'un entier

Définition

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on appelle **factorielle de n**, noté $n!$, le produit de tous les entiers de 1 à n :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Par convention : $0! = 1$

Exemples

- $1! = 1$
- $2! = 2 \times 1 = 2$
- $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040$

Propriété fondamentale : Pour tout $n \geq 1$, on a : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Cela permet de simplifier des fractions : $\dfrac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$

II. Arrangements

Définition

On appelle **arrangement de p éléments parmi n** (avec $0 \leq p \leq n$) toute sélection *ordonnée* de p éléments distincts tirés d'un ensemble de n éléments. L'ordre compte.

Formule

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Cas particulier (permutations) : $A_n^n = n!$ (on appelle cela une permutation de n éléments)

Exemples

- $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ (choisir et ordonner 2 lettres parmi 5)
- $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$
- $A_6^6 = 6! = 720$ (permutations de 6 éléments)

III. Combinaisons

Définition

On appelle **combinaison de p éléments parmi n** toute sélection *non ordonnée* de p éléments distincts tirés d'un ensemble de n éléments. L'ordre ne compte pas.

Formule

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

On lit « p parmi n » ou « combinaisons de n prises p à p ».

Propriétés fondamentales des combinaisons

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- **Symétrie :** $C_n^p = C_n^{n-p}$
- **Relation de Pascal :** $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

Exemples

- $C_5^2 = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{120}{12} = \mathbf{10}$
- $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = \mathbf{120}$
- $C_{52}^5 = 2598960$ (nombre de mains au poker)

IV. Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet de retrouver rapidement les coefficients C_n^p :

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```

Règle de construction : chaque coefficient est la somme des deux coefficients au-dessus de lui (relation de Pascal).

Ligne $n = 0$: 1 | $n = 1$: 1 1 | $n = 2$: 1 2 1 | $n = 3$: 1 3 3 1 | $n = 4$: 1 4 6 4 1

V. Binôme de Newton

Formule du binôme de Newton

Pour tous réels a et b, et pour tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$

Cas particuliers importants

- $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Identités remarquables déduites (x = 1 et x = −1)

- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$
- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

VI. Principes fondamentaux du dénombrement

Principe multiplicatif

Si une action peut s'effectuer en **k étapes successives indépendantes**, avec n_1 choix pour l'étape 1, n_2 choix pour l'étape 2, ..., n_k choix pour l'étape k, alors le nombre total de façons d'effectuer l'action est :

$$N = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Principe additif

Si une action peut s'effectuer de manière A **ou** de manière B (cas exclusifs), avec n_A et n_B façons respectivement, alors le nombre total est :

$$N = n_A + n_B$$

🎯 Formules clés

- **Factorielle :** $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \;\; ; \quad 0! = 1$
- **Arrangements :** $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
- **Permutations :** $P(n) = A_n^n = n!$
- **Combinaisons :** $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
- **Symétrie :** $C_n^p = C_n^{n-p}$
- **Pascal :** $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$
- **Newton :** $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$
- **Somme des coefficients :** $\sum C_n^k = 2^n$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Arrangements vs Combinaisons : si l'ordre compte (podium, code PIN, rang), c'est un arrangement. Si l'ordre ne compte pas (comité, équipe, main de cartes), c'est une combinaison. Confondre les deux est l'erreur la plus fréquente !

❌

Oublier $0! = 1$: $C_n^n = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$ grâce à la convention $0! = 1$. Sans cette convention, la formule ne fonctionnerait pas.

❌

Binôme de Newton — signe moins : dans $(a-b)^n$, les signes alternent. Le terme général est $C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot (-b)^k = (-1)^k \cdot C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$.

🟢 Astuces de pros

✅

Utiliser la symétrie pour simplifier : $C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} = 161700$. Toujours choisir le plus petit exposant !

✅

Pour trouver un coefficient spécifique dans $(a+b)^n$: identifier k depuis la puissance de b dans le terme cherché, puis appliquer $C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$. Pas besoin de tout développer.

💡

Relation de Pascal pour vérification rapide : $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2 = 4 + 6 = 10$. Utile pour vérifier ses calculs sans refaire la division.