2ÈME BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

# Dérivabilité et étude de fonctions

الاشتقاق ودراسة الدوال

## 📚 Résumé du cours

## I. Dérivabilité

**Définition**

f est **dérivable en a** si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est f'(a).

### Dérivées des fonctions usuelles

| f(x) | f'(x) |
|---|---|
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $\tan(x)$ | $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ |

### Règles de dérivation

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(k \cdot f)' = k \cdot f'$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f \circ g)' = g' \cdot (f' \circ g)$ ou $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$

## II. Tangente

L'équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

## III. Théorème de Rolle et des accroissements finis

### Théorème de Rolle

Si f est continue sur [a,b], dérivable sur ]a,b[ et f(a) = f(b), alors $\exists c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

### Théorème des accroissements finis (TAF)

Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur ]a,b[, alors $\exists c \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

## IV. Méthode d'étude d'une fonction

1. Domaine de définition
2. Limites aux bornes
3. Dérivée et tableau de variation
4. Points particuliers (intersection avec les axes)
5. Asymptotes (horizontales, verticales, obliques)
6. Courbe représentative

### 🎯 Formules clés

- $(e^u)' = u' \cdot e^u$
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
- TAF : $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

## 💡 Astuces & méthodes

### 🔴 Pièges classiques

❌

**Dérivée de ln(u) : oublier la condition u > 0 :** $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ est définie seulement quand u > 0. Toujours vérifier que u ne s'annule pas et reste positif sur l'intervalle d'étude.

❌

**TAF mal énoncé :** le Théorème des Accroissements Finis dit qu'il *existe* un $c \in ]a, b[$ — on ne sait pas lequel. On ne peut pas choisir $c = \frac{a+b}{2}$ sauf si f est spéciale.

❌

**Dérivée de $(e^u)' = u' \cdot e^u$ :** bien appliquer la règle de la composée — multiplier par la dérivée de u. Ne pas oublier u' !

### 🟢 Astuces de pros

✅

**Utiliser le TAF pour des inégalités :** $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|$ où $M = \max |f'|$ sur [a,b]. Très utile pour prouver qu'une suite est de Cauchy ou borner une erreur d'approximation.

✅

**Plan d'étude complet en 2BAC :** Domaine → Parité/période → Limites + asymptotes → f'(x) et variations → points d'inflexion (f'') → tracé. Ne pas sauter l'étude de la courbure !

💡

**Convexité par f'' :** $f'' > 0 \rightarrow$ convexe (courbe au-dessus de ses tangentes), $f'' < 0 \rightarrow$ concave (au-dessous). Le point d'inflexion est où f'' change de signe — important pour le tracé précis.