

# Équations différentielles

المعادلات التفاضلية

**⚠ Hors programme officiel – Enrichissement** : Ce chapitre n'est pas exigible au baccalauréat marocain standard. Il est proposé comme approfondissement pour les élèves souhaitant aller plus loin.

### I. Vocabulaire

#### Définition

Une **équation différentielle** (ED) est une équation dont l'inconnue est une fonction  $y$  et qui fait intervenir  $y$  et ses dérivées successives  $y'$ ,  $y''$ , ...

- **Ordre** : plus grand ordre de dérivation présent.
- **Linéaire** :  $y$  et ses dérivées apparaissent au premier degré (pas de produits  $y \cdot y'$ , pas de  $\sin(y)$ , etc.).
- **Solution** : toute fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie l'équation sur  $I$ .
- **Solution générale** : forme paramétrée regroupant toutes les solutions.
- **Solution particulière** : une solution donnée, choisie pour vérifier des conditions initiales (CI).

### II. Équation $y' = ay$ (homogène, ordre 1, coeff. constant)

#### Résolution

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation :

$$y' = a \cdot y$$

sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = C \cdot e^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

#### Condition initiale

Si on impose  $y(x_0) = y_0$ , la solution est **unique** :  $C = y_0 \cdot e^{-ax_0}$ .

#### Exemple

$$y' = 3y \text{ avec } y(0) = 2 : y(x) = 2 \cdot e^{3x}.$$

### III. Équation $y' + ay = b$ (avec second membre constant)

#### Résolution

Pour  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , les solutions de :

$$y' + ay = b$$

sont de la forme  $y_g = y_h + y_p$  où :

- $y_h(x) = C \cdot e^{-ax}$  (solution de l'équation homogène  $y' + ay = 0$ )
- $y_p(x) = \frac{b}{a}$  (solution particulière constante)

## Principe de superposition

Pour une équation linéaire non homogène :

$$\text{Solution générale} = \text{Solution de l'équation homogène} + \text{Une solution particulière}$$

## IV. Équation $y'' + \omega^2 y = 0$ (oscillateur harmonique)

### Résolution

Pour  $\omega > 0$ , les solutions de :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

sont les fonctions :

$$y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Ou, sous forme équivalente :  $y(x) = R \cos(\omega x - \phi)$  avec  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$  et  $\tan(\phi) = \frac{B}{A}$ .

### Conditions initiales

Deux conditions sont nécessaires pour déterminer la solution unique : par exemple  $y(0)$  et  $y'(0)$ .

- $y(0) = A$
- $y'(0) = B\omega$ , donc  $B = \frac{y'(0)}{\omega}$

### Exemple – pendule

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 : A = 1, B = 0 \Rightarrow y(x) = \cos(2x).$$

## V. Équation $y'' - \omega^2 y = 0$

### Résolution

Pour  $\omega > 0$ , les solutions de :

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

sont :

$$y(x) = A \cdot e^{\omega x} + B \cdot e^{-\omega x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Équivalent :  $y(x) = \alpha \cdot \text{ch}(\omega x) + \beta \cdot \text{sh}(\omega x)$  (si on introduit ch et sh).

## VI. Équation $y'' + ay' + by = 0$ (ordre 2, coefficients constants)

### Méthode – équation caractéristique

Pour résoudre  $y'' + ay' + by = 0$ , on associe l'équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0$$

Soit  $\Delta = a^2 - 4b$  le discriminant.

- $\Delta > 0$  : deux racines réelles  $r_1, r_2 \Rightarrow y = A \cdot e^{r_1 x} + B \cdot e^{r_2 x}$
- $\Delta = 0$  : racine double  $r_0 \Rightarrow y = (A + Bx) \cdot e^{r_0 x}$
- $\Delta < 0$  : racines complexes  $r = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y = e^{\alpha x} \cdot (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$

## Exemple

$y'' - 3y' + 2y = 0 : r^2 - 3r + 2 = 0$ , racines  $r_1 = 1, r_2 = 2 \Rightarrow y = A \cdot e^x + B \cdot e^{2x}$ .

## VII. Applications physiques

---

### Désintégration radioactive

Soit  $N(t)$  le nombre de noyaux radioactifs à l'instant  $t$ . On a  $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$ , d'où :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

La **demi-vie**  $T$  vérifie  $N(T) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ .

### Refroidissement (loi de Newton)

Soit  $T(t)$  la température d'un corps placé dans un milieu de température  $T_a$ . On a  $T'(t) = -k(T - T_a)$ , d'où :

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt}$$

### Oscillations libres d'un pendule

Pour un oscillateur harmonique sans amortissement :  $x'' + \omega^2 x = 0$ , où  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Solution :  $x(t) =$

$$x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \text{ Période } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

## VIII. Méthode de résolution générale

---

### Étapes recommandées

1. **Identifier** le type d'équation (ordre, linéaire, homogène, à coefficients constants).
2. **Résoudre l'équation homogène** associée (sans second membre).
3. **Chercher une solution particulière** (par analogie avec le second membre : constante si  $b$  constant, polynôme si  $b$  polynôme, exponentielle si  $b = e^{\alpha x}$ ).
4. **Solution générale** = solution homogène + solution particulière.
5. **Utiliser les conditions initiales** pour déterminer les constantes.

## 🎯 Formules clés

- $y' = ay : y(x) = C \cdot e^{ax}$
- $y' + ay = b : y(x) = C \cdot e^{-ax} + \frac{b}{a}$
- $y'' + \omega^2 y = 0 : y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$
- $y'' - \omega^2 y = 0 : y = A \cdot e^{\omega x} + B \cdot e^{-\omega x}$
- $y'' + ay' + by = 0$  : équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$  · 3 cas selon  $\Delta$
- **Principe de superposition** :  $y_{\text{gén}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}}$
- **Désintégration** :  $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$  · demi-vie  $T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$
- **Newton** :  $T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt}$
- **Oscillateur** : période  $\frac{2\pi}{\omega}$

## 💡 Astuces & méthodes

### 🔴 Pièges classiques



**Équation caractéristique : trois cas selon  $\Delta$**  :  $\Delta > 0 \rightarrow$  deux racines réelles (exponentielles),  $\Delta = 0 \rightarrow$  racine double ( $te^{rt}$ ),  $\Delta < 0 \rightarrow$  racines complexes conjuguées (sin/cos). Ne pas confondre les cas !



**Solution particulière par analogie** : si le second membre est  $e^{\alpha x}$  et que  $\alpha$  est racine simple de l'éq. caractéristique, la solution particulière est  $x \cdot e^{\alpha x}$  (pas juste  $e^{\alpha x}$  !). Si c'est une racine double :  $x^2 \cdot e^{\alpha x}$ .



**Oublier les constantes d'intégration** : pour une équation d'ordre 2, la solution générale doit contenir deux constantes A et B. Les conditions initiales ( $y(0)$  et  $y'(0)$ ) permettent de les déterminer.

### 🟢 Astuces de pros



**Méthode en 5 étapes** : 1) Identifier le type, 2) Résoudre l'homogène (éq. caractéristique), 3) Trouver une solution particulière (par analogie), 4) Solution générale = hom + part, 5) Appliquer les CI pour fixer les constantes.



**Vérifier la solution** : substitue  $y(x)$  dans l'équation différentielle. Si l'égalité est vérifiée, la solution est correcte. Cette vérification prend 2 minutes et évite les erreurs de copie.



**Modèles physiques** : désintégration ( $y' = -\lambda y$ ), refroidissement Newton ( $y' = -k(y - T_a)$ ), oscillateur harmonique ( $y'' + \omega^2 y = 0$ ). Reconnaître le modèle détermine directement la forme de la solution. [www.lesolutions.com](https://www.lesolutions.com)