Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Fonctions exponentielles

الدوال الأسية

📚 Résumé du cours

I. Fonction exponentielle

Définition

La fonction **exp** est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que exp'(x) = exp(x) et exp(0) = 1.

Notation : exp(x) = e^x

Propriétés algébriques

- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$
- $e^0 = 1$, $e^1 = e \approx 2.718$
- $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Dérivée

- $(e^x)' = e^x$
- $(e^u)' = u' \cdot e^u$

Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ (croissances comparées)
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = 0$

II. Fonction $x \mapsto a^x$

Pour $a > 0$: $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

III. Équations et inéquations

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ (car exp est strictement croissante)

🎯 Formules clés

- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
- $(e^u)' = u' \cdot e^u$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

$e^a \cdot e^b \neq e^{ab}$ **:** la règle correcte est $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$. Les exposants s'additionnent à la multiplication, ne se multiplient pas !

❌

Résoudre $e^{f(x)} > e^{g(x)}$ **:** puisque exp est CROISSANTE (et toujours positive), l'inéquation équivaut directement à $f(x) > g(x)$. Pas d'inversion du sens !

❌

a^x **quand** $a < 0$ **:** pour $a < 0$, a^x n'est pas défini pour tout x réel. La formule $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ nécessite $a > 0$ (pour que $\ln(a)$ soit défini).

🟢 Astuces de pros

✅

Croissances comparées à retenir : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n \cdot e^x = 0$. L'exponentielle domine toute puissance en $+\infty$.

✅

Linéariser $e^u \approx 1 + u$ **pour** $u \approx 0$ **:** développement limité d'ordre 1. Très utile pour calculer des limites : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1}{x} = 1$.

💡

Modélisation exponentielle : désintégration radioactive $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, demi-vie $T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$. Croissance bactérienne $N(t) = N_0 e^{kt}$. Reconnaître le schéma $f' = af$.