Fonctions logarithmiques

الدوال اللوغاريتمية

📚 Résumé du cours

I. Logarithme népérien

Définition

La fonction **ln** est la bijection réciproque de exp : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$

ln : $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par : $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

Propriétés fondamentales

- $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$
- $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$
- $\ln(1/a) = -\ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Dérivée

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$

Limites fondamentales

- $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ pour $\alpha > 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \ln(x) = 0$ pour $\alpha > 0$

II. Logarithme décimal

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

$\log(10) = 1$, $\log(10^n) = n$

III. Résolution d'équations et inéquations

$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ (avec $a, b > 0$)

$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ (car ln est croissante)

🎯 Formules clés

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

$\ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b)$ **:** la propriété de logarithme concerne la multiplication : $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$. Il n'y a pas de formule pour $\ln(a+b)$!

❌

Domaine de ln : $\ln(u)$ est défini seulement pour $u > 0$ (strictement). $\ln(0)$ n'est pas défini (tend vers $-\infty$). Toujours vérifier l'argument avant d'écrire $\ln(\ldots)$.

❌

$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ **:** valide seulement si a et b sont tous deux positifs. Ne pas utiliser cette propriété sans vérifier que les arguments sont bien positifs.

🟢 Astuces de pros

✅

Limite $x \cdot \ln(x)$ **en** 0^+ **:** résultat = 0 (à mémoriser !). Utiliser la substitution $x = e^{-t}$ avec $t \to +\infty$ pour le retrouver : $x \cdot \ln(x) = e^{-t} \cdot (-t) = -\dfrac{t}{e^t} \to 0$.

✅

Résoudre $\ln(f(x)) < \ln(g(x))$ **:** puisque ln est croissante, l'inéquation équivaut à $f(x) < g(x)$ ET les deux arguments positifs. Résoudre le système des deux conditions !

💡

Logarithme décimal : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} \approx \dfrac{\ln(x)}{2,303}$. Utile pour les calculs d'ordre de grandeur. $\log(1000) = 3$, $\log(0.001) = -3$.