Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Géométrie dans l'espace

الهندسة في الفضاء

📚 Résumé du cours

I. Repère orthonormé de l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, et l'on note $\vec{u}(x, y, z)$.

Tout point M est repéré par ses coordonnées (x, y, z) telles que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

II. Produit scalaire

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$. Le **produit scalaire** est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

On a aussi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Orthogonalité : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

III. Produit vectoriel

Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$. Le **produit vectoriel** $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur de coordonnées :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')$$

Propriétés :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (antisymétrie).
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.
- **Aire du parallélogramme** ABDC = $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$. **Aire du triangle** ABC = $\frac{1}{2} \cdot \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

IV. Équation cartésienne d'un plan

Un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ passant par A(x_0, y_0, z_0) a pour équation :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

soit $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Déterminer l'équation d'un plan passant par trois points A, B, C non alignés :

1. Calculer $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ (vecteur normal).
2. Écrire : $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$.

V. Représentation paramétrique d'une droite

La droite (D) passant par A(x_0, y_0, z_0) et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ est l'ensemble des M(x, y, z) tels que :

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc \quad (t \in \mathbb{R})$$

VI. Distances

Distance d'un point à un plan : pour $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et (P) : $ax + by + cz + d = 0$,

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Distance d'un point à une droite : pour M_0 et (D) passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$,

$$d(M_0, D) = \frac{\|\vec{AM_0} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

VII. Sphère

La **sphère** de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R > 0$ a pour équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Une équation de la forme $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$ représente une sphère ssi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta > 0$, de centre (α, β, γ) et rayon $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$.

Intersection sphère-plan : soient S de centre Ω, rayon R, et P plan. On pose $d = d(\Omega, P)$.

- Si $d > R$: l'intersection est vide.
- Si $d = R$: P est tangent à S (intersection = un point).
- Si $d < R$: l'intersection est un **cercle** de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ et de centre H (projeté orthogonal de Ω sur P).

VIII. Positions relatives

Deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$:

- Parallèles $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires.
- Perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.

Droite et plan avec $\vec{u}$ vecteur directeur et $\vec{n}$ normal :

- Parallèles $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
- Perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires.

🎯 Formules clés

- **Produit scalaire :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- **Produit vectoriel :** $\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$
- **Aire**$(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$
- $d(M_0, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
- $d(M_0, D) = \frac{\|\vec{AM_0} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$
- **Sphère :** $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
- **Section $S \cap P$:** cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$ si $d < R$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Produit vectoriel non commutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$. L'ordre compte ! Changer l'ordre inverse le signe de chaque composante. Très différent du produit scalaire (commutatif) !

❌

Plan perpendiculaire à une droite : si la droite a pour vecteur directeur $\vec{u}$, le plan perpendiculaire a $\vec{u}$ comme vecteur normal. Un plan perpendiculaire à une droite contient toutes les directions orthogonales à $\vec{u}$.

❌

Distance point-plan — ne pas oublier la valeur absolue : $d(M_0, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Le numérateur peut être négatif sans la valeur absolue, ce qui donnerait une distance négative (impossible !).

🟢 Astuces de pros

✅

Trouver un vecteur normal à un plan : si tu connais deux vecteurs directeurs du plan ($\vec{u}$ et $\vec{v}$), leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal au plan. Très utile pour trouver l'équation du plan !

✅

Section sphère-plan — méthode : calcule $d =$ distance(centre, plan). Si $d < R \to$ cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Si $d = R \to$ tangence. Si $d > R \to$ vide. La formule d(centre, plan) s'applique directement.

💡

Aire d'un triangle en 3D : Aire$(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$. Calcule le produit vectoriel, puis sa norme. Beaucoup plus rapide que la formule avec l'angle si tu as les coordonnées des points.