Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Limites et continuité

النهايات والاتصال

📚 Résumé du cours

I. Limites d'une fonction

Limites en un point

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Limites de référence

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

Formes indéterminées

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ 1^\infty,\ 0^0$

Opérations sur les limites

Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$:

- $\lim(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim(f \times g) = \ell \times \ell'$
- $\lim(f/g) = \ell/\ell'$ (si $\ell' \neq 0$)

II. Croissances comparées

Au voisinage de $+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ (l'exponentielle l'emporte sur les puissances)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ pour $\alpha > 0$ (les puissances l'emportent sur $\ln$)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

III. Continuité

Définition

f est **continue en** a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

f est **continue sur** I si elle est continue en tout point de I.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Corollaire (bijection) : Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$.

IV. Prolongement par continuité

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ (finie) et f n'est pas définie en a, on prolonge f par continuité en posant $f(a) = \ell$.

🎯 Formules clés

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $e^x \gg x^n \gg \ln x$ en $+\infty$
- TVI : f continue, $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c : f(c) = 0$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$: ne jamais simplifier "$\frac{\infty}{\infty} = 1$" ! Il faut factoriser par le terme dominant. Ex : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2-x} = \lim \dfrac{x^2(3+1/x^2)}{x^2(1-1/x)} = \dfrac{3}{1} = 3.$

❌

Oublier les croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot e^{-x} = 0$ (l'expo bat la puissance). Beaucoup d'élèves concluent "$+\infty \times 0$ = indéterminé" sans utiliser la croissance comparée.

❌

Limite $\frac{\sin x}{x}$: valable seulement en 0 : $\frac{\sin x}{x} \to 1$ quand $x \to 0$ (et x en radians !). En $+\infty$, $\frac{\sin x}{x} \to 0$ (gendarmes avec $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$).

🟢 Astuces de pros

✅

Lever une FI $\frac{0}{0}$ par factorisation : si $f(a) = g(a) = 0$, factorise par $(x-a)$ aux numérateur et dénominateur, puis simplifie avant de substituer.

✅

Conjugué pour les radicaux : pour $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, multiplier par $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. La différence se transforme en $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \to 0$.

💡

Prolongement par continuité : si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ mais $f(a)$ non défini, on peut "prolonger" f en posant $f(a) = \ell$ pour rendre f continue. C'est exactement ce qu'on fait avec $\frac{\sin x}{x}$ en posant sa valeur $= 1$ en $x = 0$.