Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Nombres complexes

الأعداد المركبة

📚 Résumé du cours

I. Forme algébrique

Définition

Un nombre complexe z s'écrit **z = a + bi** avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

$a = \mathrm{Re}(z)$ (partie réelle), $b = \mathrm{Im}(z)$ (partie imaginaire)

Opérations

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- Conjugué : $overlinez$ = $a - bi$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- Module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

II. Forme trigonométrique

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = r \cdot e^{i\theta}$

$\theta = \arg(z)$: argument de z

Formules

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ et $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
- $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ et $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
- $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$

III. Forme exponentielle

$z = r \cdot e^{i\theta}$ (formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)

IV. Formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

V. Racines n-ièmes de l'unité

$z^n = 1 \Rightarrow z_k = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$

VI. Applications géométriques

- Distance $AB = |z_B - z_A|$
- Milieu de [AB] : $z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

- $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) =$ angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
- Translation : $z' = z + t$
- Rotation de centre Ω et angle θ : $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$

🎯 Formules clés

- $i^2 = -1$, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Division en forme algébrique — multiplier par le conjugué : pour z_1/z_2, multiplier numérateur ET dénominateur par $\overline{z_2}$. Le dénominateur devient $|z_2|^2$ (réel !). Ne jamais "simplifier" partie par partie.

❌

Argument de z_1/z_2 : $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ (soustraction, pas addition). Et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

❌

Racines n-ièmes : ne pas en oublier : l'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions dans $\mathbb{C}$. Les racines n-ièmes de l'unité : $z_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

🟢 Astuces de pros

✅

Moivre pour les formules trigo : $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta} \rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$. Développer le membre gauche et identifier parties réelle/imaginaire donne $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

✅

Lien géométrie-complexes : le module $|z_B - z_A| = AB$ (distance), $\arg(z_B - z_A) =$ angle de AB avec l'axe réel. La rotation de centre Ω d'angle θ : $z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

💡

Somme des racines de l'unité = 0 : pour $n \geq 2$, la somme des n racines n-ièmes de l'unité vaut 0. Très utile pour des identités trigonométriques et des calculs de sommes.