Atlasmaths

atlasmaths.com

2ÈME BAC · SCIENCES MATHÉMATIQUES · FICHE DE COURS

Probabilités

الاحتمالات

📚 Résumé du cours

I. Variables aléatoires

Définition

Une **variable aléatoire** X est une application de l'univers Ω vers $\mathbb{R}$.

La **loi de probabilité** de X est la donnée de $P(X = x_i)$ pour chaque valeur x_i.

Espérance, variance, écart-type

- $E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 \cdot P(X = x_i) - \mu^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$

II. Loi binomiale B(n, p)

Loi binomiale

X suit B(n, p) si : $P(X = k) = C(n, k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

où $C(n, k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1 - p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

III. Loi de Poisson P(λ)

$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$

$E(X) = V(X) = \lambda$

IV. Loi normale N(μ, σ²)

Loi normale centrée réduite N(0,1)

Densité : $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

Propriétés de la fonction de répartition Φ :

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $P(|X| \leq 1.96) \approx 0.95$
- $P(|X| \leq 2.58) \approx 0.99$

Intervalle de confiance

Pour une proportion p estimée par f sur n observations :

$$IC_{95\%} = [f - 1.96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}; f + 1.96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}]$$

V. Probabilités conditionnelles

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$

Formule de Bayes : $P(A|B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$

🎯 Formules clés

- $P(X = k) = C(n, k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ (binomiale)
- $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$
- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Bayes : $P(A|B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$
- $IC_{95\%}$: $[f \pm 1.96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}]$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Loi normale : la table donne $P(Z \leq z)$, pas $P(Z = z)$: pour une loi normale, $P(Z = k) = 0$ pour toute valeur k. Toujours calculer des probabilités sur des intervalles.

❌

Intervalle de confiance ≠ probabilité : "IC à 95%" signifie que la méthode donne un intervalle qui contient le vrai paramètre dans 95% des cas, pas que la probabilité est 95% pour CET intervalle particulier.

❌

Binomiale avec grand n : on peut approximer $B(n, p)$ par une loi normale $N(np, np(1-p))$ seulement si $np \geq 5$ ET $n(1-p) \geq 5$. Vérifier ces conditions avant d'approximer !

🟢 Astuces de pros

✅

$P(|Z| \leq 1.96) \approx 0.95$ **— à mémoriser :** pour une loi normale centrée réduite, 95% des valeurs sont dans $[-1.96; 1.96]$. D'où la formule de l'IC à 95%.

✅

Bayes avec un arbre : dessine l'arbre, calcule $P(B)$ par les probabilités totales, puis $P(A|B) = \frac{\text{(branche A puis B)}}{P(B)}$. Visuel et fiable.

💡

Lire la table de la loi normale : la table donne $\Phi(z) = P(Z \leq z)$. Pour $P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$. Pour $P(Z \geq a) = 1 - \Phi(a)$. Toujours se ramener à des probabilités de la forme $P(Z \leq z)$.