Les suites numériques

المتتاليات العددية

📚 Résumé du cours

I. Généralités sur les suites

Définition

Une **suite numérique** est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Modes de génération

- **Forme explicite :** $u_n = f(n)$. Exemple : $u_n = 2n^2 + 3n - 1$
- **Forme récurrente :** $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 donné. Exemple : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$

II. Suites arithmétiques

Définition et propriétés

(u_n) est **arithmétique** de raison r $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$

- **Terme général :** $u_n = u_0 + nr = u_p + (n-p)r$
- **Somme :** $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$
- **Somme des n premiers entiers :** $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

III. Suites géométriques

Définition et propriétés

(u_n) est **géométrique** de raison q $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \cdot u_n$

- **Terme général :** $u_n = u_0 \cdot q^n = u_p \cdot q^{n-p}$
- **Somme (q ≠ 1) :** $S_n = u_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- **Formule utile :** $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

IV. Sens de variation

- **Méthode 1 :** Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- **Méthode 2 :** Si $u_n > 0$, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
- **Méthode 3 :** Étudier f(x) si $u_n = f(n)$

V. Convergence des suites

Théorèmes fondamentaux

- **Théorème de convergence monotone :** Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) converge.

- **Suites adjacentes :** Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $\lim(v_n - u_n) = 0$, alors elles convergent vers la même limite.
- **Suite géométrique :** $\lim q^n = 0$ si $|q| < 1$; diverge si $|q| \geq 1$ ($q \neq 1$)
- **Limites de référence :** $\lim n^\alpha = +\infty$ ($\alpha > 0$) ; $\lim \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ ($\alpha > 0$)

VI. Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.

Pour montrer la convergence : chercher un intervalle stable, montrer la monotonie et les bornes.

🎯 Formules clés

- $u_n = u_0 + nr$ (arithmétique)
- $S = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ (somme arithmétique)
- $u_n = u_0 \cdot q^n$ (géométrique)
- $S = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (somme géométrique)
- $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n = 0$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Convergence monotone : deux conditions obligatoires : croissante ET majorée (ou décroissante ET minorée). Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$!

❌

Point fixe ne garantit pas la convergence : si $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$. Mais l'existence d'un point fixe ne prouve pas que la suite converge — il faut aussi montrer la convergence.

❌

Suites adjacentes : vérifier les deux conditions : l'une croissante, l'autre décroissante ET $v_n - u_n \to 0$. Une seule condition ne suffit pas !

🟢 Astuces de pros

✅

Intervalle stable pour $u_{n+1} = f(u_n)$: cherche $[a, b]$ tel que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Si f est monotone sur $[a, b]$ et la suite y commence, elle y reste — preuve par récurrence.

✅

Utiliser les suites adjacentes pour encadrer une limite : si (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers ℓ, alors pour tout n : $u_n \leq \ell \leq v_n$. Très utile pour les approximations numériques.

💡

Croissances comparées en $+\infty$: $\ln(n) \ll n^\alpha \ll e^n$ (pour $\alpha > 0$). Quand $n \to +\infty$, l'exponentielle "écrase" toute puissance, qui "écrase" tout logarithme.