

Divisibilité, PGCD et PPCM

القابلية للقسمة، ق.م.أ و م.م.م

📖 Résumé du cours

Chapitre 6 : Divisibilité, PGCD et PPCM

I. Divisibilité

Un entier **a** est **divisible** par un entier **b** ($b \neq 0$) s'il existe un entier **k** tel que $a = b \times k$.
On dit aussi : b est un **diviseur** de a, ou a est un **multiple** de b.

II. Critères de divisibilité

- **Par 2** : chiffre des unités $\in \{0,2,4,6,8\}$
- **Par 3** : somme des chiffres divisible par 3
- **Par 5** : chiffre des unités $\in \{0,5\}$
- **Par 9** : somme des chiffres divisible par 9
- **Par 10** : chiffre des unités = 0
- **Par 4** : les deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4

III. Nombres premiers et décomposition

Un entier ≥ 2 est **premier** s'il n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.
Premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...
Tout entier ≥ 2 s'écrit de façon unique comme produit de facteurs premiers.

Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

IV. PGCD — Algorithme d'Euclide

PGCD(a, b) : diviser a par b, noter le reste r. Puis PGCD(a,b) = PGCD(b,r). Continuer jusqu'à $r = 0$.

Exemple : PGCD(84,56) : $84 = 56 \times 1 + 28 \rightarrow 56 = 28 \times 2 + 0 \rightarrow$ **PGCD = 28**

V. PPCM

$$\text{PPCM}(a,b) = \frac{a \times b}{\text{PGCD}(a,b)}$$

Exemple : $\text{PPCM}(84,56) = \frac{84 \times 56}{28} = 168$

Formules clés

- **Critère $\div 3$** : somme des chiffres divisible par 3
- **Critère $\div 9$** : somme des chiffres divisible par 9
- **PGCD(a,b) = PGCD(b, a mod b)** (Euclide)
- **PPCM(a,b) = $\frac{a \times b}{\text{PGCD}(a,b)}$**

Astuces & méthodes

Pièges classiques



Critère de divisibilité par 6 oublié : un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 ET par 3. Les deux conditions sont obligatoires !



Confondre PGCD et PPCM : le PGCD est le plus grand diviseur commun (on divise), le PPCM est le plus petit multiple commun (on multiplie). $\text{PGCD} \leq \min(a,b)$ et $\text{PPCM} \geq \max(a,b)$.



Mal appliquer Euclide : $\text{PGCD}(84, 56) : 84 = 56 \times 1 + 28 \rightarrow \text{PGCD}(56, 28) : 56 = 28 \times 2 + 0 \rightarrow \text{PGCD} = 28$. On s'arrête quand le reste est 0.

Astuces de pros



Critères rapides : $\div 2 \rightarrow$ dernier chiffre pair ; $\div 5 \rightarrow$ finit par 0 ou 5 ; $\div 10 \rightarrow$ finit par 0 ; $\div 4 \rightarrow$ les 2 derniers chiffres divisibles par 4.



Simplifier une fraction avec le PGCD : $\frac{36}{48} \rightarrow \text{PGCD}(36,48)=12 \rightarrow \frac{36}{12} = 3, \frac{48}{12} = 4 \rightarrow$ fraction simplifiée $= \frac{3}{4}$.



Trouver le PPCM facilement : si $\text{PGCD}(a,b)=1$ (premiers entre eux), alors $\text{PPCM} = a \times b$. Ex : $\text{PPCM}(7,9) = 63$ car $\text{PGCD}(7,9)=1$.