

Symétrie centrale

التماثل المركزي

I. Définition

Soit O un point du plan. La **symétrie centrale** de centre O est la transformation qui à tout point M associe un point M' tel que **O est le milieu du segment $[MM']$** .

On dit que M' est le **symétrique** de M par rapport au centre O .

Construire le symétrique de M par rapport à O :

1. Tracer la droite (OM) .
2. Reporter la distance OM de l'autre côté de O pour obtenir M' tel que $OM = OM'$.
3. M' est le symétrique cherché.

II. Propriétés de la symétrie centrale

- Le symétrique du centre O est lui-même : $S_O(O) = O$.
- **Conservation** : la symétrie centrale conserve les distances, les longueurs et les angles.
- Le symétrique d'une droite est une droite **parallèle**.
- Le symétrique d'un segment est un segment de même longueur.
- Le symétrique d'un cercle de centre A et rayon R est un cercle de même rayon R , de centre A' (symétrique de A).

III. Figure symétrique par rapport à un centre

Une figure F est **symétrique par rapport à un centre O** si son image par la symétrie centrale de centre O est elle-même.

O s'appelle alors un **centre de symétrie** de la figure.

Figures ayant un centre de symétrie :

- Cercle : tout centre (infinité).
- Rectangle : le centre du rectangle.
- Losange : le point d'intersection des diagonales.
- Parallélogramme : le point d'intersection des diagonales.

Figures sans centre de symétrie : triangle quelconque, triangle isocèle non équilatéral.

IV. Symétrie centrale en coordonnées

Si $O(a ; b)$ est le centre et $M(x ; y)$ le point, alors le symétrique M' a pour coordonnées :

$$x' = 2a - x \quad y' = 2b - y$$

Cas particulier — symétrie par rapport à l'origine $O(0 ; 0)$: $M'(-x ; -y)$.

V. Différence avec la symétrie axiale

| | Symétrie axiale | Symétrie centrale |
|-----------------|----------------------------------|----------------------------|
| Élément fixe | Un axe (droite) | Un centre (point) |
| $MM' \perp$ axe | Oui, axe = médiatrice de $[MM']$ | Non, O = milieu de $[MM']$ |
| Distances | Conservées | Conservées |
| Orientation | Inversée | Conservée |

🎯 Formules clés

- O milieu de $[MM'] \Leftrightarrow M'$ symétrique de M par rapport à O
- Coordonnées : $x' = 2a - x, y' = 2b - y$
- Par rapport à $O(0;0)$: $M(x; y) \mapsto M'(-x; -y)$
- Parallélogramme, rectangle, losange \rightarrow centre de symétrie
- Triangle (en général) \rightarrow pas de centre de symétrie

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques



Confondre symétrie axiale et centrale : axiale = par rapport à une droite (miroir), centrale = par rapport à un point (demi-tour). Le résultat visuel est différent !



Erreur dans la formule : si le centre est $O(a;b)$, alors $M'(2a - x; 2b - y)$. Si le centre est $O(0;0)$, simplement $M'(-x; -y)$. Ne pas oublier le "2a" !

🟢 Astuces de pros



Méthode graphique : pour trouver le symétrique de M par rapport à O, trace le segment $[MO]$ et prolonge-le de l'autre côté de O de la même longueur. M' est à la même distance de O que M.



Centre de symétrie du parallélogramme : l'intersection des diagonales est toujours un centre de symétrie du parallélogramme. Très utile pour les problèmes de construction !



La symétrie centrale conserve l'orientation : contrairement à la symétrie axiale qui inverse l'orientation (droite/gauche), la symétrie centrale conserve le sens de parcours des sommets.