Atlasmaths

atlasmaths.com

3ÈME ANNÉE COLLÈGE · FICHE DE COURS

Vecteurs du plan

المتجهات في المستوى

📚 Résumé du cours

I. Notion de vecteur

Un **vecteur** est défini par :

- Une **direction** (la droite qui le supporte),
- Un **sens** (l'orientation sur cette droite),
- Une **norme** (longueur, notée $\|\vec{u}\|$).

Le vecteur $\vec{AB}$ est le vecteur dont le point de départ est A et le point d'arrivée est B. Sa norme est $\|\vec{AB}\| = AB$ (distance).

Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est le vecteur $\vec{AA}$ pour tout point A. Sa norme est 0.

II. Égalité de vecteurs — translation

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont **égaux** ($\vec{AB} = \vec{CD}$) s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Géométriquement : $\vec{AB} = \vec{CD}$ ⇔ ABDC est un parallélogramme (ou A = C et B = D).

Il y a une **infinité** de représentants d'un même vecteur (un par point de départ). Tous les vecteurs égaux forment un même vecteur « libre ».

La **translation** de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui associe à tout point M le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$.

III. Addition de vecteurs

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$ est le vecteur :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \text{ (règle de Chasles)}$$

Règle de Chasles : pour tous points A, B, C :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Conséquences : $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$; $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} - \vec{CB}$.

Pour tout point O : $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$.

Propriétés de l'addition :

- Commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- Associativité : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- Élément neutre : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
- Opposé : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, avec $-\vec{AB} = \vec{BA}$.

IV. Multiplication par un scalaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Le vecteur $k \cdot \vec{u}$ est défini par :

- $||k \cdot \vec{u}|| = |k| \cdot ||\vec{u}||$ (norme multipliée par |k|),
- Même direction que $\vec{u}$,
- Même sens si k > 0, sens opposé si k < 0.
- Si k = 0 ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Colinéarité : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (non nuls) sont **colinéaires** ssi il existe un réel k tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

⇔ ils ont la même direction (ou directions opposées).

Application : A, B, C sont alignés ⇔ $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

V. Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique :

$$\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

On note $\vec{u}$(x, y) ou $\vec{u} = (x, y)$. Les réels x et y sont les **coordonnées** de $\vec{u}$.

Si A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B), alors :

$$\vec{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$$

Calculs avec les coordonnées : si $\vec{u}$(x, y) et $\vec{v}(x', y')$:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$
- $k \cdot \vec{u} = (kx, ky)$
- $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\vec{u} = \vec{v}$ ⇔ x = x' et y = y'
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ⇔ $xy' - yx' = 0$ (déterminant nul)

VI. Milieu d'un segment

Le milieu I de [AB] vérifie $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. Ses coordonnées sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

🎯 Formules clés

- **Chasles :** $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$
- $\vec{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$
- $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- **Colinéaires ⇔** $xy' - yx' = 0$
- **Milieu I de [AB] : (x_I, y_I) = ($\frac{x_A + x_B}{2}$, $\frac{y_A + y_B}{2}$)**
- $k \cdot \vec{u} = (kx, ky)$ **;** $||k \cdot \vec{u}|| = |k| \cdot ||\vec{u}||$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Inverser l'ordre de soustraction des coordonnées — $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$. C'est B moins A, pas A moins B.

❌

Confondre vecteur nul et point origine — Le vecteur nul $\vec{0}$ a des coordonnées (0, 0) mais il n'est pas un point, c'est un vecteur sans direction.

❌

Oublier que $\vec{AB} \neq \vec{BA}$ — Ces deux vecteurs sont opposés : $\vec{BA} = -\vec{AB}$. La direction est la même, le sens est opposé.

🟢 Astuces de pros

✅

Test de parallélogramme ABCD : ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$ (pas $\vec{CD}$!). Attention à l'ordre des lettres.

💡

Pour la règle de Chasles, penser à un chemin : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Le B "se simplifie" : on part de A, on passe par B, on arrive en C.