

Dénombrement

العد والتوافيق

I. Cardinal d'un ensemble fini

Un ensemble E est **fini** s'il contient un nombre fini d'éléments. Ce nombre est appelé **cardinal** de E et noté **card(E)** ou $|E|$.

Dénombrer un ensemble, c'est déterminer son cardinal.

II. Principe additif et principe multiplicatif

Principe additif (ou des choix exclusifs) : si A et B sont deux ensembles finis **disjoints** ($A \cap B = \emptyset$), alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Cas général (A et B quelconques) :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Principe multiplicatif (ou des choix successifs) : si une situation se décompose en k étapes successives offrant respectivement n_1, n_2, \dots, n_k possibilités, alors le nombre total de résultats est :

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

Exemple : pour former un code à 4 chiffres (chaque chiffre de 0 à 9, avec répétition autorisée), on a $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$ codes.

III. Factorielle

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle **factorielle de n** , noté $n!$, le produit :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Par convention : $0! = 1$.

$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5\,040$.

Relation utile : $n! = n \times (n - 1)!$

IV. Permutations

Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un **arrangement ordonné** de tous ses éléments (chaque élément apparaît une fois).

Le nombre de permutations de n éléments est :

$$n!$$

Nombre de façons d'ordonner 5 livres sur une étagère : $5! = 120$.

V. Arrangements

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier avec $0 \leq p \leq n$. Un **arrangement** de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments **distincts** choisis parmi les n .

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Cas particuliers : $A_n^0 = 1, A_n^1 = n, A_n^n = n!$

Quand utiliser un arrangement ?

- On choisit p éléments parmi n.
- L'ordre **compte** (\neq combinaisons).
- Sans répétition (\neq p-listes).

Exemple : nombre de podiums (or, argent, bronze) parmi 10 coureurs = $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

VI. Combinaisons

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier avec $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E est une **partie** (sous-ensemble) de E à p éléments — sans ordre, sans répétition.

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Propriétés des C_n^p :

- $C_n^0 = C_n^n = 1; C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
- **Symétrie :** $C_n^p = C_n^{n-p}$.
- **Relation de Pascal :** $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.
- **Somme :** $\sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$ (nombre de parties d'un ensemble à n éléments).

Quand utiliser une combinaison ?

- On choisit p éléments parmi n.
- L'ordre **ne compte pas** (choix simultané, équipe, comité, mains de cartes).
- Sans répétition.

Exemple : nombre d'équipes de 3 joueurs parmi 10 = $C_{10}^3 = 120$.


VII. Formule du binôme de Newton

Pour tout entier $n \geq 0$ et tous réels a, b :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

Exemples : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

VIII. Récapitulatif — choisir p parmi n

Type	Ordre	Répétition	Nombre
 Atlasmaths — La plateforme #1 maths au Maroc p-liste (tirage avec remise)	oui	oui	n^p www.atlasmaths.com

Arrangement	oui	non	A_n^p
Permutation ($p = n$)	oui	non	$n!$
Combinaison	non	non	C_n^p

🎯 Formules clés

- **Principe multiplicatif** : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$
- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
- **Permutations** : $n!$
- **Arrangements** : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- **Combinaisons** : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- **Symétrie** : $C_n^p = C_n^{n-p}$
- **Pascal** : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$
- **Binôme** : $(a + b)^n = \sum C_n^p \cdot a^{n-p} \cdot b^p$
- $\sum C_n^p = 2^n$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques



Arrangement \neq Combinaison — Arrangement : l'ordre compte (on choisit 3 élèves pour président, vice-président, secrétaire). Combinaison : l'ordre ne compte pas (on choisit 3 élèves dans un groupe).



$0! = 1$, **pas 0** — Par convention, $0! = 1$. C'est indispensable pour que $C(n, 0) = 1$ et $C(n, n) = 1$.



$C(n, p)$ **n'est défini que pour** $0 \leq p \leq n$ — $C(5, 7)$ n'existe pas. Toujours vérifier que $p \leq n$ avant de calculer.

🟢 Astuces de pros



Question clé avant de calculer : "L'ordre compte-t-il ?" Si oui \rightarrow arrangement. Si non \rightarrow combinaison. "Avec ou sans remise ?" change aussi la formule.



Utiliser la symétrie $C(n, p) = C(n, n-p)$ pour simplifier : $C(10, 8) = C(10, 2) = 45$. Toujours prendre le plus petit des deux.