# Géométrie dans l'espace

الهندسة في الفضاء

## 📚 Résumé du cours

### I. Axiomes et notions de base

L'espace est constitué de **points**, **droites** et **plans**. On admet :

- Par deux points distincts passe une **unique droite**.
- Par trois points non alignés passe un **unique plan**.
- Si deux points distincts d'une droite (D) appartiennent à un plan (P), alors toute la droite est incluse dans (P) : (D) $\subset$ (P).
- Dans tout plan de l'espace, la géométrie plane s'applique.

### II. Détermination d'un plan

Un plan est déterminé de façon unique par l'une des données suivantes :

- Trois points non alignés A, B, C — plan noté (ABC).
- Une droite (D) et un point M $\notin$ (D).
- Deux droites sécantes (D) $\cap$ (D') = {M}.
- Deux droites strictement parallèles.

### III. Positions relatives de deux droites

Deux droites (D) et (D') de l'espace sont, de façon exclusive :

- **Coplanaires** (incluses dans un même plan) :
  - **Sécantes** : (D) $\cap$ (D') = {un point}.
  - **Parallèles strictes** : (D) $\parallel$ (D'), (D) $\neq$ (D'), (D) $\cap$ (D') = $\emptyset$.
  - **Confondues** : (D) = (D').
- **Non coplanaires** (pas de plan commun) : (D) $\cap$ (D') = $\emptyset$ mais non parallèles.

### IV. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite (D) et un plan (P) sont, de façon exclusive :

- **(D) $\subset$ (P)** : la droite est contenue dans le plan.
- **(D) $\cap$ (P) = {un point}** : la droite est sécante au plan.
- **(D) $\parallel$ (P)** : (D) $\cap$ (P) = $\emptyset$.

**Critère de parallélisme droite-plan :** une droite (D) est parallèle à un plan (P) ssi (D) est parallèle à **au moins une droite** contenue dans (P).

### V. Positions relatives de deux plans

Deux plans (P) et (P') sont, de façon exclusive :

- **Parallèles** : (P) $\cap$ (P') = $\emptyset$ (parallèles stricts) ou (P) = (P') (confondus).
- **Sécants** : (P) $\cap$ (P') est une **droite**.

**Critères de parallélisme de deux plans :**

- (P) $\parallel$ (P') ssi (P) contient deux droites sécantes parallèles à (P').

- Si (P) $\parallel$ (P') et si un plan (Q) coupe (P) en (D), alors (Q) coupe (P') en (D') avec (D) $\parallel$ (D').

### VI. Théorème du toit

Soient (P) et (P') deux plans sécants suivant une droite (Δ). Si (D) $\subset$ (P) et (D') $\subset$ (P') sont deux droites parallèles, alors (D), (D') et (Δ) sont **parallèles entre elles**.

### VII. Orthogonalité dans l'espace

> Deux droites (D) et (D') sont dites **orthogonales** si leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires. (Attention : contrairement au plan, deux droites orthogonales dans l'espace ne sont pas nécessairement sécantes.)
>
> Une droite (D) est **perpendiculaire** à un plan (P) ssi elle est orthogonale à toute droite de (P).

**Critère :** (D) $\perp$ (P) ssi (D) est orthogonale à **deux droites sécantes** de (P).

Si (D) $\perp$ (P) et (D') $\parallel$ (D), alors (D') $\perp$ (P). Si (D) $\perp$ (P) et (P) $\parallel$ (P'), alors (D) $\perp$ (P').

### VIII. Solides usuels — aires et volumes

| Solide | Volume | Aire totale |
|---|---|---|
| Cube (arête a) | $a^3$ | $6a^2$ |
| Pavé droit (L, l, h) | $L \cdot l \cdot h$ | $2(Ll + Lh + lh)$ |
| Prisme droit | $B \times h$ | $2B + P \cdot h$ |
| Pyramide | $\frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ | $B + A_{\text{latérale}}$ |
| Cylindre droit (R, h) | $\pi R^2 h$ | $2\pi R^2 + 2\pi Rh$ |
| Cône droit (R, h) | $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ | $\pi R^2 + \pi R \cdot \ell$ ($\ell$ = génératrice) |
| Sphère (R) | $\frac{4}{3}\pi R^3$ | $4\pi R^2$ |

B = aire de la base, P = périmètre de la base.

## 🎯 Formules clés

- **Plan déterminé par :** 3 points non alignés, 2 droites sécantes, 2 droites strictement parallèles
- **Deux droites :** sécantes / parallèles / confondues / non coplanaires
- **(D) $\parallel$ (P) :** (D) parallèle à une droite de (P)
- **Théorème du toit :** $(D) \parallel (D') \Rightarrow (\Delta) \parallel (D) \parallel (D')$
- **(D) $\perp$ (P) :** (D) orthogonale à 2 droites sécantes de (P)
- $V(\text{pyramide}) = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ **;** $V(\text{cône}) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ **;** $V(\text{sphère}) = \frac{4}{3}\pi R^3$
- $A(\text{sphère}) = 4\pi R^2$ **;** $A(\text{cylindre}) = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$

## 💡 Astuces & méthodes

### 🔴 Pièges classiques

❌

**Deux droites dans l'espace peuvent être ni parallèles, ni sécantes** — Ce sont les droites "gauches" (non coplanaires). En 2D cela n'existe pas, attention au passage à la 3D.

❌

**Oublier le facteur 1/3 pour pyramide et cône** — C'est la même règle qu'en 3AC : les solides "pointus" ont $V = \frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur}$.

❌

**(D) $\perp$ (P) nécessite 2 droites sécantes de (P), pas juste une** — Une droite perpendiculaire à une seule droite du plan n'est pas forcément perpendiculaire au plan.

### 🟢 Astuces de pros

✅

**Section plane d'un solide :** trouver les intersections du plan avec chaque face, en utilisant les théorèmes de parallélisme. Procéder face par face.

💡

La hauteur d'un solide est toujours perpendiculaire à la base. La confondre avec une arête latérale est une erreur fréquente dans les calculs de volume.