

Ordre dans \mathbb{R}

الترتيب في \mathbb{R}

Résumé du cours

Relation d'ordre dans \mathbb{R}

La relation \leq dans \mathbb{R} est une **relation d'ordre total** : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Propriétés de l'ordre

- Si $a \leq b$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $a + c \leq b + c$
- Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $a \times c \leq b \times c$
- Si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $a \times c \geq b \times c$ (changement de sens)
- Si $0 < a \leq b$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
- Si $a \leq b < 0$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

Majorant, minorant, bornes

Majorant : M est un majorant de A si pour tout $x \in A$, $x \leq M$.

Minorant : m est un minorant de A si pour tout $x \in A$, $m \leq x$.

Borne supérieure (sup A) : Le plus petit des majorants.

Borne inférieure (inf A) : Le plus grand des minorants.

Encadrement et approximation

Si $a \leq x \leq b$ et $a' \leq y \leq b'$, alors :

$$a + a' \leq x + y \leq b + b'$$

Pour le produit, il faut étudier les signes.

Formules clés

- $a \leq b$ et $c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$
- $0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$
- $0 < a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Astuces & méthodes

Pièges classiques



Multiplier par un négatif sans inverser le sens — La règle fondamentale : \times ou \div par $c < 0 \Rightarrow$ sens de l'inégalité inversé. Oubli le plus fréquent au TC.



$a^2 \leq b^2$ ne signifie pas $a \leq b$ en général — Cette propriété n'est valable que si a et b sont tous les deux positifs. Si $a = -5$ et $b = 3$, $a^2 = 25 > b^2 = 9$ mais $a < b$.



Séparer une inéquation produit sans tableau de signes — $(x - 1)(x + 2) > 0$ ne se résout pas comme une équation. Il faut un tableau de signes.

Astuces de pros



Tableau de signes pour un produit/quotient : trouver les zéros, placer sur une droite, étudier le signe de chaque facteur dans chaque intervalle.



Toujours vérifier la solution en testant une valeur dans l'inéquation originale.