Atlasmaths

atlasmaths.com

TRONC COMMUN SCIENCES · FICHE DE COURS

Produit scalaire dans le plan

الجداء السلمي في المستوى

📚 Résumé du cours

I. Définitions du produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel défini, selon le contexte, par l'une des expressions équivalentes :

- **Définition géométrique :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
- **Par projection :** si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, et H le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$ (produit des mesures algébriques).
- **Par les normes :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
- **En repère orthonormé :** si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Cas particuliers :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (appelé carré scalaire, noté $\vec{u}^2$).
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

II. Propriétés algébriques

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

- **Symétrie :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- **Bilinéarité :** $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- **Identités remarquables :**
  - $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
  - $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
  - $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III. Orthogonalité

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Montrer que (AB) ⊥ (CD) : il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ (en utilisant les coordonnées ou une formule adaptée).

IV. Applications géométriques

Théorème de la médiane : soit I le milieu de [BC]. Pour tout point A :

$$AB^2 + AC^2 = 2 \cdot AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Théorème d'Al-Kashi (loi des cosinus) : dans un triangle ABC, en notant $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$$

Cas particulier ($\hat{A} = 90^\circ$) : théorème de Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$.

Formule de l'aire : dans un triangle ABC,

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\hat{A})$$

V. Équation cartésienne d'une droite par un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, une droite (D) passant par $A(x_0, y_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ a pour équation :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

soit $ax + by + c = 0$, avec $c = -(ax_0 + by_0)$.

VI. Distance d'un point à une droite

La distance du point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite (D) : $ax + by + c = 0$ est :

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

VII. Équation cartésienne d'un cercle

Le **cercle** de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Équivalent : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$.

Reconnaître une équation de cercle : écrire sous la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, compléter les carrés pour obtenir $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. On a un cercle ssi $R^2 > 0$.

Cercle de diamètre [AB] : l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB] (théorème du cercle vu sous un angle droit).

🎯 Formules clés

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = xx' + yy'$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- **Al-Kashi :** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$
- **Aire =** $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\hat{A})$
- **Médiane :** $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$
- $d(M, D) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- **Cercle :** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
- **Diamètre [AB] :** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ **est un scalaire, pas un vecteur** — Le produit scalaire donne un nombre, pas un vecteur. Ne pas écrire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec une flèche.

❌

Al-Kashi : bien identifier a, b, c et l'angle opposé — $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$. Le côté a est OPPOSÉ à l'angle $\hat{A}$. Ne pas mettre le mauvais angle.

❌

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ **seulement si** $\vec{u} \neq \vec{0}$ **et** $\vec{v} \neq \vec{0}$ — Le vecteur nul est perpendiculaire à tout vecteur par convention, mais ce cas doit être exclu dans les démonstrations.

🟢 Astuces de pros

✅

Calculer l'angle entre deux vecteurs : $\cos(\text{angle}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$. Calculer le produit scalaire par coordonnées $(xx' + yy')$, puis diviser par les normes.

💡

Al-Kashi se réduit à Pythagore quand l'angle est 90° : $\cos(90^\circ) = 0$ donc $a^2 = b^2 + c^2$. Utiliser Al-Kashi quand on n'a pas d'angle droit.