Atlasmaths

atlasmaths.com

TRONC COMMUN SCIENCES · FICHE DE COURS

Transformations du plan

تحويلات المستوى

📚 Résumé du cours

I. Notion de transformation

Une **transformation** du plan est une application f : P → P qui, à chaque point M, associe un unique point M' = f(M) appelé **image** de M. Le point M est appelé **antécédent** de M'.

On note aussi M $\to$ M'.

II. La translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La **translation** de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est la transformation qui à tout point M associe M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Propriétés de la translation :

- Conserve les distances (isométrie) : M'N' = MN.
- Conserve les angles, les aires, l'alignement, le parallélisme.
- Image d'une droite : droite parallèle.
- Image d'un cercle de centre Ω et rayon R : cercle de centre $\Omega' = t_{\vec{u}}(\Omega)$ et même rayon R.

Expression analytique : dans un repère, si $\vec{u}(a, b)$ et M(x, y), alors M'(x', y') = $t_{\vec{u}}$(M) est donné par :

$$x' = x + a, \quad y' = y + b$$

III. La symétrie centrale

Soit Ω un point. La **symétrie centrale** de centre Ω, notée S_Ω, est la transformation qui à tout M associe M' tel que Ω **soit le milieu de [MM']**.

Équivalent : $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.

Une symétrie centrale est une **isométrie** (conserve les distances, angles, aires). C'est aussi une rotation d'angle 180°.

Image d'une droite : droite parallèle. Image d'un cercle : cercle de même rayon.

Expression analytique : si $\Omega(a, b)$, M(x, y), alors M'(x', y') :

$$x' = 2a - x, \quad y' = 2b - y$$

IV. La symétrie axiale (orthogonale)

Soit (Δ) une droite. La **symétrie axiale** d'axe (Δ), notée S_Δ, est la transformation qui à tout M associe M' tel que (Δ) **soit la médiatrice de [MM']** (si M $\notin$ Δ), ou M' = M si M $\in$ Δ.

Isométrie. Points fixes : tous les points de (Δ). Image d'une droite (D) : droite (D') ; parallèles ssi (D) $\parallel$ (Δ) ou (D) = (Δ).

Expression analytique (cas usuels) :

- Symétrie par rapport à l'axe (Ox) : (x, y) $\rightarrow$ (x, $-$y).
- Symétrie par rapport à l'axe (Oy) : (x, y) $\rightarrow$ ($-$x, y).
- Symétrie par rapport à la droite y = x : (x, y) $\rightarrow$ (y, x).

V. La rotation

Soient Ω un point et θ un angle orienté. La **rotation** de centre Ω et d'angle θ, notée $R_{(\Omega,\theta)}$, est la transformation qui à tout M $\neq \Omega$ associe M' tel que :

- $\Omega M' = \Omega M$ (conservation de la distance au centre),
- $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ (mesure de l'angle orienté).

De plus $R_{(\Omega,\theta)}(\Omega) = \Omega$.

Une rotation est une **isométrie**. Elle conserve les distances, les angles (et leur orientation), les aires. Image d'une droite : droite (non parallèle en général sauf si θ multiple de π). Image d'un cercle : cercle de même rayon.

Cas particuliers : $\theta = 0 \Rightarrow$ identité ; $\theta = \pi \Rightarrow$ symétrie centrale S_Ω.

VI. L'homothétie

Soient Ω un point et k un réel non nul. L'**homothétie** de centre Ω et de rapport k, notée $h_{(\Omega,k)}$, est la transformation qui à tout M associe M' tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$$

Propriétés de l'homothétie $h_{(\Omega,k)}$:

- Si k = 1 : identité. Si k = $-$1 : symétrie centrale S_Ω.
- Multiplie les distances par |k| : M'N' = |k|·MN.
- Conserve les angles, l'alignement, le parallélisme.
- Image d'une droite : droite **parallèle**. Image d'un cercle de rayon R : cercle de rayon |k|·R.
- Multiplie les aires par k^2.

Expression analytique : si $\Omega(a, b)$, M(x, y), alors M'(x', y') = $h_{(\Omega,k)}$(M) :

$$x' = a + k(x - a), \quad y' = b + k(y - b)$$

VII. Récapitulatif — effets sur les figures

Transformation	Distances	Aires	Angles	Droite → droite
Translation	conservées	conservées	conservés	parallèle
Symétrie centrale	conservées	conservées	conservés	parallèle
Symétrie axiale	conservées	conservées	conservés (orientation inversée)	droite

Rotation	conservées	conservées	conservés	droite (image)
Homothétie (k)	× |k|	× k^2	conservés	parallèle

🎯 Formules clés

- **Translation** $t_{\vec{u}}$ **:** $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$; $x' = x + a, y' = y + b$
- **Symétrie centrale** S_Ω **:** Ω milieu [MM'] ; $x' = 2a - x, y' = 2b - y$
- **Symétrie axiale (Ox) :** (x, y) → (x, −y)
- **Rotation** $R_{(\Omega,\theta)}$ **:** $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$
- **Homothétie** $h_{(\Omega,k)}$ **:** $\overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$; distances × |k|, aires × k^2
- **Isométries :** translation, symétries, rotation (conservent distances)

💡 Astuces & méthodes

🔴 Pièges classiques

❌

Homothétie : les aires sont multipliées par k^2, pas par k — Si k = 3, les longueurs sont × 3 mais les aires sont × 9. Ne pas confondre l'effet sur les longueurs et sur les surfaces.

❌

Symétrie axiale ≠ symétrie centrale — Axiale : symétrie par rapport à une droite (axe). Centrale : symétrie par rapport à un point (centre). Les formules de coordonnées sont différentes.

❌

La rotation conserve les distances et les angles, pas les orientations — Une rotation directe conserve l'orientation. Une symétrie inverse l'orientation.

🟢 Astuces de pros

✅

Isométries (conservent les distances) : translation, rotation, symétrie axiale, symétrie centrale. L'homothétie de rapport k $\neq \pm 1$ n'est PAS une isométrie.

💡

Pour trouver l'image d'un point, appliquer les formules de coordonnées directement plutôt que de faire une construction géométrique (plus rapide et moins d'erreurs).